

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

Методические указания для проведения лабораторного практикума
по дисциплине

"Физика"

семестр 2 (механика и молекулярная физика)

Для направлений подготовки:

01.03.02, 01.03.03, 04.03.01, 06.03.01, 08.03.01, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04,
10.03.01, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.04, 13.03.02, 15.03.01, 15.03.02, 15.03.04, 15.03.05,
15.03.06, 19.03.01, 20.03.01, 21.03.02, 22.03.01, 23.03.01, 23.03.02, 23.03.03, 24.03.02,
24.03.03, 27.03.01, 27.03.02, 29.03.03, 49.03.01, 10.05.03, 11.05.01, 15.05.01, 17.05.01,
17.05.02, 21.05.04, 23.05.01, 24.05.01, 24.05.02, 24.05.06

Методические указания подготовлены проф. Ю.Н. Колмаковым и доц. В.А.Семиным

Тула - 2022

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	стр.4
МЕХАНИКА	
Работа №1. Исследование косо́го удара о наклонную плоскость.....	4
Работа №2. Упругий удар шаров.....	6
Работа №3а. Определение скорости пули с помощью баллистического маятника.....	8
Работа №3б. Измерение скорости пули с помощью физического маятника.....	10
Работа №3в. Измерение скорости пули с помощью вращающейся платформы.....	12
Работа №4. Изучение вращательного движения.....	14
Работа №5. Определение моментов инерции методом колебаний.....	15
Работа №6. Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика.....	18
Работа №6а. Определение момента инерции тел методом крутильных колебаний.....	20
Работа №7. Определение коэффициента трения качения для различных материалов.....	23
Работа №8. Определение силы трения скольжения.....	26
Работа №9. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника.....	28
Работа №10. Изучение колебаний пружинного маятника.....	30
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	
Работа №13. Определение показателя адиабаты методом Клемана и Дезорма.....	33
Работа №14. Определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва кольца.....	36
Работа №15. Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса.....	39
Работа №16. Определение длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха.....	41

ВВЕДЕНИЕ

Рабочие программы предусматривают обязательное выполнение шести лабораторных работ по физике во втором семестре обучения и шести лабораторных работ в третьем семестре обучения. Эти работы выполняются по индивидуальному графику, имеющемуся в каждой лаборатории кафедры физики. Без выполнения шести работ и сдачи оформленного согласно приложенным образцам отчета по проделанным измерениям и полученным результатам студент не допускается к экзамену по физике.

Каждый сданный отчет по одной работе оценивается в 2 балла текущей аттестации. Студент имеет право ответить на вопросы и тесты, обосновывающие теорию и методику выполняемой работы. Успешная сдача такого теоретического минимума по каждой работе оценивается также в 2 балла текущей аттестации.

Далее приведены теоретические обоснования всех лабораторных работ, выполняемых в лабораторном практикуме кафедры физики ТулГУ по различным темам курса физики, изучаемым согласно рабочим программам. Изложены минимальные сведения, необходимые для защиты выполненных лабораторных работ и успешного ответа на контрольные вопросы. В каждой работе указан порядок выполнения экспериментальных измерений, их обработки и оформления отчетов.

Работа №1. Исследование косо́го удара о наклонную плоскость

Цель работы: исследовать траекторию движения шара после удара о плоскость; определить коэффициент восстановления скорости шара.

Теоретическое описание

Лабораторная установка изображена на рис. 1. Двумя держателями “Д” закрепляют стальную наклонную плоскость и бункер “С”, куда помещают маленький стальной шарик m . Угол α наклона плоскости к горизонту определяют, измерив расстояния h_1 и h_2 от плоскости до опоры в двух точках и расстояние l между этими точками. Тогда $\sin \alpha = (h_2 - h_1)/l$ (рис.1).

На стальную плоскость кладут полоску чистой бумаги, на которой отмечена линия L_1L_2 , и закрепляют бумагу скобой. Положение этой линии отмечают риску в точке L_1 на стальной поверхности. Сверху помещают листок копировальной бумаги **слева** от этой линии. Если открыть заслонку “З”, то, падая с высоты h из жёстко закреплённого бункера, шарик будет попадать на копировальную бумагу практически в одну точку, расстояние x_0 от которой до линии L_1L_2 измеряют по полуценной на бумаге отметке.

В работе исследуется удар стального шарика о стальную поверхность. Поэтому бумажную полоску перегибают по линии L_1L_2 и снова кладут на стальную поверхность **справа**, накрывая листком копировальной бумаги и закрепляя скобой так, чтобы линия L_1L_2 совпала с отмеченной риской L_1 . Теперь шарик будет отскакивать от стали и, как обсуждается ниже, будет попадать на бумагу с разбросом, создавая отметки на разных расстояниях x_i от линии L_1L_2 (рис.2.1). По этим отметкам можно найти среднее расстояние $x = x_0 + \langle x_i \rangle$ между двумя точками попадания шарика на наклонную плоскость.

Удар называется абсолютно упругим, если после удара механическая энергия сталкивающихся тел не изменяется. В данном случае при абсолютно упругом ударе шарик должен отскочить от плоскости с той же по величине скоростью, с которой он падал на неё. Напомним, что полная механическая энергия, состоящая из кинетической и потенциальной энергии, сохраняется, $E_{\text{мех}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \text{const}$, если все действующие в системе силы консервативны, т.е. их работа, равная изменению кинетической энергии, равна убыли потенциальной энергии системы: $A_{\text{конс}} = \int \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = -\Delta E_{\text{пот}} = \Delta E_{\text{кин}}$. Такой силой является сила упругости. Кинетическая энергия сталкивающихся тел переходит в потенциальную энергию упругого взаимодействия и наоборот.

При абсолютно неупругом ударе сталкивающиеся тела слипаются и движутся как одно целое. При этом часть механической энергии превращается в тепло или в энергию неупругих деформаций. Изменение механической энергии равно работе неконсервативных сил, действующих в системе: $\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{неконс}}$. Примером неконсервативной силы будет сила трения.

В реальных столкновениях слипания тел не происходит, но суммарная механическая энергия соударяющихся тел уменьшается. Эту потерю характеризуют коэффициентом восстановления скорости. Пусть сталкиваются два тела, летевшие со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Линия, перпендикулярная к общей касательной к поверхностям сталкивающихся тел в точке соприкосновения называется линией удара n (рис.2). Разность проекций скоростей на эту линию будет относительной скоростью сближения тел $|\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}|$. Сразу после столкновения скорости разлетающихся тел \vec{u}_1 и \vec{u}_2 и относительная скорость их разлёта $|\vec{u}_{1n} - \vec{u}_{2n}|$ уменьшаются. Коэффициентом восстановления скорости называется величина

$$k_c = |\vec{u}_{1n} - \vec{u}_{2n}| / |\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}| < 1.$$

В данной работе одно из тел (стальная плоскость) неподвижно, и коэффициент k_c определяется как отношение проекций скоростей шарика на нормаль n к плоскости сразу после соударения (рис.3,в) и до соударения (рис.3,а): $k_c = |u_n/v_n|$.

В момент наибольшего сближения шарика с плоскостью его нормальная проекция скорости будет равна нулю (рис.3,б). И шарик, и плоскость деформируются (изменяют свою форму) и возникает нормальная сила реакции (сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$), которая будет отталкивать шарик от плоскости, сообщая ему новую скорость \vec{u}_n . При этом деформация происходит и в

касательном направлении, приводя к появлению силы, которую обычно называют силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис.3,б). Эта сила не успевает изменить касательную проекцию скорости шарика, так как удар происходит очень быстро, а центр масс шарика может смещаться вдоль плоскости. Но при этом создаётся момент сил трения $\vec{M}_{\text{тр}} = [\vec{r}, \vec{F}_{\text{тр}}]$, который раскручивает шарик, сообщая ему угловую скорость ω . После 2-3 ударов шарик перестаёт отскакивать и начинает катиться по наклонной плоскости, а касательная проекция скорости шарика после удара практически не изменяется: $u_x = v_x$.

Для расчета выберем оси координат, в которых ось x направлена вдоль наклонной плоскости, под углом α к горизонту, а ось y – по нормали к плоскости (рис.4). При падении с высоты h потенци-

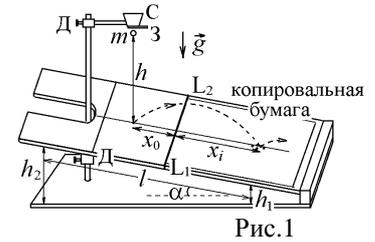


Рис.1



Рис.2

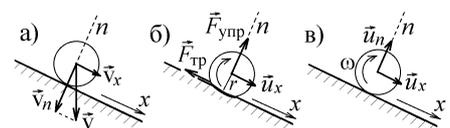


Рис.3

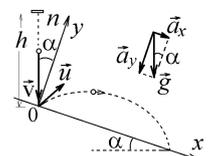


Рис.4

альная энергия шарика превращается в кинетическую: $mgh = mv^2/2$, т.е. шарик подлетает к плоскости со скоростью

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

После отскока проекция его скорости на ось x не меняется, $u_x = v_x = v \sin \alpha$, а проекция $u_y = u_n = k_c v_n = k_c v \cos \alpha$ будет меньше величины v_n , поскольку часть механической энергии шарика превратилась в тепловую энергию и энергию неупругой деформации тел.

В выбранных осях шарик движется с постоянным ускорением, имеющим проекции $a_x = g \sin \alpha$ и $a_y = -g \cos \alpha$ (g – ускорение свободного падения). В момент повторного падения шарика на плоскость уравнения кинематики имеют вид:

$$x = u_x t + a_x t^2/2 = v \sin \alpha \cdot t + g \sin \alpha \cdot t^2/2, \quad (2)$$

$$y = 0 = u_y t + a_y t^2/2 = k_c v \cos \alpha \cdot t - g \cos \alpha \cdot t^2/2. \quad (3)$$

Из уравнения (3) получим $t = 2k_c v/g$ и, подставляя в (2), находим $x = 2v^2 \sin \alpha (k_c^2 + k_c)/g$. С учетом (1) приходим к

$$\text{уравнению } k_c^2 + k_c - \frac{x}{4h \sin \alpha} = 0, \text{ имеющему решение } k_c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{x}{h \sin \alpha}} - 1 \right). \quad (4)$$

Опыты показывают, что при соударении тел из стали $k_c \approx 0,55$.

Порядок выполнения работы

1. Перемещением муфты А установить произвольный наклон плоскости (примерно 10-15°). Измерить высоты h_1 и h_2 , длину наклонной плоскости l между линиями L_1 и L_2 (см.рис.1) и определить величину $\sin \alpha = (h_2 - h_1)/l$.

Примечание. Можно произвольно изменять длину наклонной плоскости l , изменяя при этом другие высоты h_1 и h_2 .

2. Перемещением муфты В установить произвольную высоту h (17–20 см) бункера С над наклонной плоскостью. Отцентрировать установку бункера так, чтобы шарик после отскока ударился еще один раз о наклонную плоскость в направлении ее продольной оси.

3. Положить на наклонную плоскость узкую полоску бумаги краем вдоль черты L_1 , накрыть сверху копировальной бумагой и закрепить оба листа скобой. При проведении эксперимента скобу не трогать.

4. Поместить шарик в бункер С в слегка открытое отверстие (это позволит более точно фиксировать начальное положение шарика). Затем медленно открыть заслонку, дав шарiku провалиться. Ударившись о плоскость, шарик отскочит и оставит след на бумаге.

5. Обозначить точку удара на бумаге точкой 1. Отогнуть от линии L_1 и полоску бумаги и копировальную бумагу таким образом, чтобы повторное падение шарика из бункера пришлось на металлическую поверхность; отскочив от нее, шарик второй раз ударится о поверхность и оставит след на бумаге. Эту точку обозначить цифрой 1'.

6. Повторить опыт при отогнутой бумаге 9 раз, отмечая следы от повторных ударов соответственно 1', 2', ..., 9'.

7. Снять листы с плоскости, определить расстояния x_i между точками 1-1', 1-2', 1-3', ..., 1-9' и занести в табл.1.

8. Вычислить среднее значение $\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9}{9}$.

9. Определить случайные отклонения $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$ каждого измерения расстояния, среднее квадратичное отклонение

$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta x_i)^2}$. Вычислить погрешность Δx результата измерений: $\Delta x = \frac{S}{\sqrt{n}}$ (n -количество точек).

10. Вычислить среднее значение коэффициента восстановления скорости по формуле (4) $\langle k_c \rangle = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\langle x \rangle}{h \sin \alpha}} - 1 \right)$. Принимаем

радиус шарика $r \ll h$.

11. Вычислить абсолютную Δk_c и относительную E погрешности: $\Delta k_c = \frac{\Delta x}{4(2\langle k_c \rangle + 1)h \sin \alpha}$; $E = \frac{\Delta k_c}{\langle k_c \rangle} 100\%$. (5)

12. Результаты измерений и расчетов записать в табл.1 и 2.

Таблица 2

Таблица 1

x_i , мм	Δx_i , мм	$(\Delta x_i)^2$, мм ²

Таблица 2

l , мм	h , мм	h_1 , мм	h_2 , мм	$\sin \alpha$	$\langle x \rangle$, мм	S , мм	Δx , мм	$\langle k_c \rangle$	Δk_c	E , %

13. Записать результат в виде: $k_c = \langle k_c \rangle \pm \Delta k_c = \dots \pm \dots$

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 1

1. Что называется коэффициентом восстановления скорости?

2. Опишите методику определения этого коэффициента в данной работе. Зачем надо фиксировать линию $L_1 L_2$ на установке?

3. Какое соударение называется абсолютно упругим, а какое - абсолютно неупругим? Наблюдаются ли эти соударения в данной работе?
4. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии. Когда этот закон выполняется, а когда нарушается в данной работе?
5. Опишите этапы соударения шарика со стальной плоскостью на рис.3. Почему нормальная проекция скорости шарика при ударе меняет свою величину, а касательная проекция его скорости практически не меняется?
6. Во что превращается часть механической энергии соударяющихся тел? Как определить эту часть при нормальном падении шарика на плоскость, если известен коэффициент восстановления скорости k_c ?
7. С помощью рис.4 и уравнений кинематики сделайте все этапы получения расчётной формулы (4).

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - гл.III, §19, 24, 25, 27
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.I §8, гл.3 §3,6, гл.6 §4.

Работа №2. Упругий удар шаров

Цель работы: ознакомиться с явлением удара на примере соударения шаров, рассчитать коэффициент восстановления энергии, проверить выполнение закона сохранения импульса.

Теоретическое описание

В работе исследуется соударение двух небольших металлических шаров, подвешенных на невесомых нитях длины l . В положении равновесия шары находятся в нижней точке и касаются друг друга. Их положения α_0 и β_0 определяются по круговой шкале, на которой деления нанесены в градусах. Один из шаров отводят на угол $\Delta\alpha$. Тогда $\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha_1$ - новое положение шара, отмечаемое по шкале. При этом, как видно из рис.5, он поднимается на высоту

$$h = l(1 - \cos \Delta\alpha_1) = l \cdot 2 \sin^2 (\Delta\alpha_1/2). \quad (6)$$

После того, как поднятый шар будет отпущен, он движется вниз и соударяется со вторым шаром, висающим неподвижно. Скорость v налетающего шара в момент удара можно определить из закона сохранения механической энергии (потенциальная энергия переходит в кинетическую): $mgh = mv^2/2$, откуда

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (7)$$

Дальнейшее движение шаров после удара можно определить с помощью законов сохранения. **Закон сохранения импульса** всегда выполнен в **замкнутой** (или **изолированной**) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения движения (2-го закона Ньютона), записанного в виде $\frac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, откуда импульс $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$. В нашем случае силы тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити \vec{N} уравновешены только в нижней точке, в которой происходит удар.

Но закон сохранения импульса часто можно применить и в незамкнутой системе, в которой $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$, но взаимодействие происходит очень быстро, за время $\Delta t \rightarrow 0$ (удар, взрыв). Тогда изменение импульса $\Delta \vec{p}_{\text{системы}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$ пренебрежимо мало и можно считать, что $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$. В нашем случае выполнены оба этих условия.

Сразу после **центрального удара** шары движутся со скоростями \vec{u}_1 и \vec{u}_2 , направленными вдоль горизонтальной линии удара (рис.2), проходящей через центры масс шаров. Эти скорости направлены в одну сторону, если масса налетающего шара m_1 больше массы m_2 шара, висевшего неподвижно. Если $m_1 < m_2$, то шары разлетаются в разные стороны, как показано на рис. 6. В таком случае, когда меньший шар налетает со скоростью v на неподвижный большой шар, закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось имеет вид

$$m_1 v = -m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (8)$$

После удара нити подвеса разлетающихся шаров m_1 и m_2 отклонятся на максимальные углы $\Delta\alpha_2$ и $\Delta\beta_2$, а шары поднимутся на высоту h_1 и h_2 соответственно (рис. 6). Связь скорости v , с которой шар m_1 подлетает к точке удара, с углом $\Delta\alpha_1$ первоначального отклонения нити его подвеса (рис5) следует из соотношений (6) и (7):

$$v = 2\sqrt{gl} \sin (\Delta\alpha_1/2). \quad (9)$$

Аналогичными соотношениями связаны углы $\Delta\alpha_2$ и $\Delta\beta_2$ со скоростями разлёта шаров на рис. 6:

$$u_1 = 2\sqrt{gl} \sin (\Delta\alpha_2/2), \quad u_2 = 2\sqrt{gl} \sin (\Delta\beta_2/2). \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим соотношение

$$m_1 \sin (\Delta\alpha_1/2) = -m_1 \sin (\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin (\Delta\beta_2/2), \quad (11)$$

позволяющее экспериментально проверить выполнение закона сохранения импульса при ударе шаров по измеренным углам отклонения их нитей подвеса.

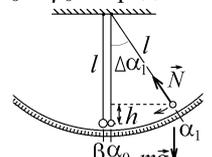


Рис.5

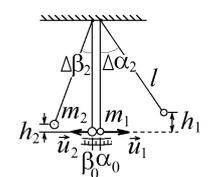


Рис.6

Закон сохранения полной механической энергии будет выполняться в том случае, когда все действующие в системе силы консервативны. В этом случае происходит абсолютно упругий удар: шары при столкновении упруго сжимаются и часть их кинетической энергии превращается в потенциальную энергию упругой деформации. В момент наибольшего сближения (деформации) шары движутся с одной скоростью, а потом начинают разлетаться, восстанавливая свою форму. Потенциальная энергия упругой деформации превращается в кинетическую энергию шаров, разлетающихся со скоростями u_1 и u_2 . В таком случае для проводимого эксперимента закон сохранения механической энергии можно записать в виде $\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$ и решать его совместно с законом сохранения импульса (8).

При абсолютно неупругом ударе шары слипаются и движутся далее с одной скоростью u . Часть механической энергии затрачивается на работу диссипативных сил внутреннего трения, которая превращается в энергию остаточной деформации и выделяется в результате в виде тепла Q . Законы сохранения импульса и энергии в этом случае примут вид

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u \quad \text{и} \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + Q.$$

В случае реального центрального соударения металлических шаров, исследуемого в работе, шары не слипаются, но действующие диссипативные силы внутреннего трения уменьшают механическую энергию системы. Это уменьшение характеризуют величиной коэффициента восстановления кинетической энергии k_3 – отношения кинетической энергии шаров после удара к их энергии до удара. С учетом (9) и (10) величину этого коэффициента можно вычислить по формуле

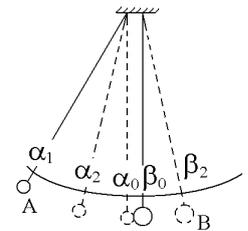
$$k_3 = \frac{m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2}{m_1 v^2 / 2} = \frac{m_1 \sin^2(\Delta\alpha_2 / 2) + m_2 \sin^2(\Delta\beta_2 / 2)}{m_1 \sin^2(\Delta\alpha_1 / 2)}. \quad (12)$$

Предоставив шарам раскачиваться и совершать удары, можно убедиться, что постепенно скорости и амплитуды движения шаров будут затухать, и со временем шары неподвижно повиснут в положении равновесия. Вся кинетическая энергия будет израсходована на работу диссипативных сил.

Порядок выполнения работы

1. Записать начальные положения α_0 и β_0 , соответствующие точкам пересечения нитей бифилярных подвесов с линией деления шкалы, когда шары неподвижны. Здесь и в дальнейшем обозначение "α" относится к шару А с меньшей массой m_1 , а "β" – к шару В с меньшей массой m_2 .

2. Отклонить шар А на угол α_1 от 10° до 15° и отпустить без начальной скорости. Произвести отсчет первого отброса обоих шаров α_2 и β_2 (так как сразу практически невозможно взять два отсчета, то поступают так: сначала берут отсчет для одного шара, затем производят повторный удар из того же положения шара А и берут отсчет для второго шара). Удар из данного положения производят не менее 10 раз, чтобы для каждого шара получить не менее пяти значений отбросов нитей после удара (α_2 и β_2). Найти среднее $\langle \alpha_2 \rangle$ и $\langle \beta_2 \rangle$.



3. Опыт проделать для двух других значений α_1 . (от 20° до 25° , от 30° до 35°). Заполнить таблицу 1.

4. Проверить закон сохранения импульса (8). Для этого определить начальные и конечные отклонения шаров $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$, $\Delta\alpha_2 = \langle \alpha_2 \rangle - \alpha_0$ и $\Delta\beta_2 = \langle \beta_2 \rangle - \beta_0$ (рис.6) и рассчитать величины левой и правой части уравнения (11):

$\xi_1 = m_1 \sin(\Delta\alpha_1 / 2)$ и $\xi_2 = -m_1 \sin(\Delta\alpha_2 / 2) + m_2 \sin(\Delta\beta_2 / 2)$. Результаты занести в таблицу 2, и по формуле $\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \cdot 100\%$

рассчитать на сколько процентов отличаются величины ξ_1 и ξ_2 .

5. Вычислить коэффициент восстановления энергии k_3 по формуле (12).

Таблица 1.

$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$			$\langle \alpha_2 \rangle, ^\circ$	$\beta_2, ^\circ$			$\langle \beta_2 \rangle, ^\circ$

$\alpha_0, ^\circ = \dots$

$\beta_0, ^\circ = \dots$

Таблица 2.

$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0, ^\circ$	$\Delta\alpha_2 = \langle \alpha_2 \rangle - \alpha_0, ^\circ$	$\Delta\beta_2 = \langle \beta_2 \rangle - \beta_0, ^\circ$	ξ_1	ξ_2	$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \cdot 100\%$	k_3

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 2

1. Сформулируйте закон сохранения импульса системы и условия его выполнения.
2. Какая система называется замкнутой, и будет ли замкнутой система соударяющихся шаров?
3. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии системы и условия его выполнения.

4. Какая величина называется коэффициентом восстановления энергии и может ли она быть большей или равной единице?
5. По какой причине сохраняется импульс шаров после удара, хотя их механическая энергия уменьшается? Верно ли это утверждение?
6. Какой удар называется абсолютно упругим и абсолютно неупругим? Каким ударом будет соударение шаров в проводимом эксперименте?

7. Получите связь между углом отклонения нити подвеса и высотой подъёма шара h (рис.А).

8. Шар с массой m_1 поднимают на высоту $h = 9$ см и отпускают без начальной скорости. Он испытывает центральное соударение с шаром массы m_2 , висевшим неподвижно на нити той же длины (рис.Б). Запишите выражения закона сохранения энергии и закона сохранения импульса в случае абсолютно упругого удара. Определите с помощью этих соотношений максимальную высоту подъёма шаров m_2 и m_1 после удара в случае, когда $m_2 = m_1$ и в случае, когда $m_2 = m_1/2$.

9. При условиях, изображенных на рис.2 происходит абсолютно неупругое соударение шаров. Определите величину коэффициента восстановления кинетической энергии в случаях $m_2 = m_1$ и $m_2 = 2m_1$.

10. Сделайте вывод соотношений (11) и (12). Объясните, каким образом в данной работе проверяется выполнение закона сохранения импульса.

Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1970.- §§23, 27-30.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.5 §1,5; гл.6 §1,2.

Работа №3а. Определение скорости пули с помощью баллистического маятника

Цель работы: использовать законы сохранения импульса и механической энергии для измерения скорости пули баллистическим методом.

Теоретическое описание

Баллистический маятник представляет из себя тяжёлый пустотелый цилиндр, заполненный пластилином и подвешенный на нитях. Подобные устройства используются в баллистике для определения скорости быстро летящих предметов (снарядов, пуль), застревающих в маятнике, но при этом в момент удара не возникает сил, препятствующих его движению. По углу отклонения баллистического маятника с застрявшей в нём пулей определяют скорость пули до удара.

Летящая горизонтально со скоростью v пуля массы m_1 застревает в пластине, заполняющей неподвижно висевший цилиндр маятника массы m_2 . Это **абсолютно неупругий удар**, после которого маятник с застрявшей в нём пулей начинает двигаться со скоростью u (рис.7).

При таком ударе механическая энергия системы пуля-маятник не сохраняется. **Закон сохранения полной механической энергии** выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти из соотношения $A_{тр} = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}$ (разность кинетических энергий тел до и после удара). Большая часть этой работы идёт на нагревание тел.

Закон сохранения импульса справедлив в **замкнутой** (или **изолированной**) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения 2-го закона Ньютона, записанного в виде $\frac{d\vec{p}_{системы}}{dt} = \sum \vec{F}_{внеш} = 0$, откуда импульс $\vec{p}_{системы} = \text{const}$. Но закон сохранения импульса часто можно применить и в незамкнутой системе, в которой $\sum \vec{F}_{внеш} \neq 0$, но взаимодействие происходит очень быстро, за время $\Delta t \rightarrow 0$ (удар, взрыв). Тогда изменение импульса $\Delta \vec{p}_{системы} = \sum \vec{F}_{внеш} \Delta t \rightarrow 0$ пренебрежимо мало, и можно считать, что $\vec{p}_{системы} = \text{const}$.

В данной работе, строго говоря, удар происходит не мгновенно. Пуля некоторое время τ продолжает движение в пластине, а маятник за это время отклоняется от положения равновесия, так что внешние силы тяжести и натяжения нитей не уравновешены. Однако время $\tau \ll T$, где T – период колебаний маятника, равный $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, так как баллистический маятник на двух невесомых нитях движется после удара поступательно (все его точки движутся с одинаковыми скоростями по одинаковым траекториям). Такой маятник является не физическим, а математическим. За малое время τ импульс не успеваает измениться и закон его сохранения при ударе можно записать в виде

$$m_1 v = (m_2 + m_1) u. \quad (13)$$

Для математического маятника не надо учитывать кинетическую энергию вращательного движения вокруг оси подвеса. Центр масс маятника поднимается на высоту h , и кинетическая энергия поступательного движения переходит в потенциальную энергию консервативной силы тяжести: $(m_2 + m_1) u^2 / 2 = (m_2 + m_1) gh$, откуда

$$u = \sqrt{2gh}. \quad (14)$$

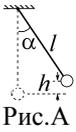


Рис.А

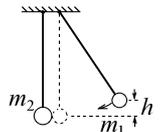


Рис.Б

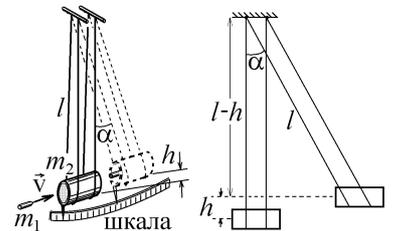


Рис.7

Высоту подъёма определяют по углу α отклонения нитей подвеса, измеряемому по круговой шкале (рис.7). Масса баллистического маятника намного больше массы пули, поэтому маятник отклоняется на малый угол, для которого $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$ (угол измеряется в радианах). Если расстояние от оси подвеса до центра маятника равно l , то

$$h = l(1 - \cos \alpha) = l \cdot 2 \sin^2(\alpha/2) \approx l\alpha^2/2. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14) и (13), находим скорость пули до удара:

$$v = \frac{m_2 + m_1}{m_1} 2\sqrt{gl} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{m_2 + m_1}{m_1} \alpha \sqrt{gl}. \tag{16}$$

Порядок выполнения работы

1. В таблицу 1 занести значения массы пули m_1 , массы маятника m_2 , длины нити l и их погрешности (величины m_1 и m_2 в граммах указаны на пуле и цилиндре). Записать в таблицу значения погрешностей измерения этих величин.

Погрешность длины нити l определяется, как половина цены деления линейки, с помощью которой измерена длина. Погрешность масс m_1 и m_2 определяется, как половина единицы последнего разряда числа, указанного на пуле и цилиндре. Например $m_1 = 30,3$ г. Последний разряд это десятые. Тогда $\Delta m_1 = \frac{0,1}{2} = 0,05$ г.

Таблица 1.

m_1 , кг	Δm_1 , кг	m_2 , кг	Δm_2 , кг	l , м	Δl , м

2. Вставить пулю в ствол пружинного пистолета.

3. Нажимая на спуск, произвести выстрел и отсчитать по шкале угол α отклонения маятника от вертикального положения (см. рис.7).

4. Значение угла отклонения записать в таблицу 2.

Таблица 2.

α_i°									
$\Delta \alpha_i^{\circ}$									
$(\Delta \alpha_i^{\circ})^2$									
$\langle \alpha \rangle^{\circ} = \dots\dots\dots$	$S = \dots\dots\dots$			$\Delta \alpha^{\circ} = \dots\dots\dots$					

5. Измерения провести не менее $n = 9$ раз. Вычислить среднее значение угла отклонения $\langle \alpha \rangle^{\circ} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^{\circ}}{n}$; случайные отклонения каждого измерения $\Delta \alpha_i^{\circ} = \alpha_i^{\circ} - \langle \alpha \rangle^{\circ}$; среднее квадратичное отклонение $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta \alpha_i^{\circ})^2}$, где n – число измерений; погрешность результата измерений $\Delta \alpha^{\circ} = S / \sqrt{n}$. Результаты занести в таблицу 2.

6. По формуле (16) $\langle v \rangle = \frac{m_1 + m_2}{m_1} 2\sqrt{gl} \sin\left(\frac{\langle \alpha \rangle}{2}\right)$ определить среднее значение скорости пули.

7. Относительную и абсолютную погрешности результата рассчитать по формулам

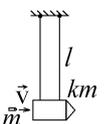
$$E = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha^{\circ}}{\langle \alpha^{\circ} \rangle}\right)^2}, \quad \Delta v = E \langle v \rangle \text{ и записать в таблицу 3.}$$

Таблица 3.

$\langle v \rangle$, м/с	Δv , м/с	E , %

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 3а

1. При каких условиях выполняются законы сохранения импульса и полной механической энергии системы? Почему при столкновении пули с баллистическим маятником можно использовать закон сохранения импульса и нельзя использовать закон сохранения механической энергии системы “пуля-маятник”?
2. Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система “пуля-маятник”?
3. Какие силы называются консервативными и диссипативными?
4. Что происходит с кинетической энергией системы “пуля-маятник” в момент удара? Какой это удар? При каком ударе она будет сохраняться?
5. Будет ли сохраняться импульс и механическая энергия системы “пуля-маятник” при её движении после удара?
6. Чем баллистический маятник отличается от физического? Каким выражением определяется период его колебания и почему?
7. Пуля с массой m , летевшая со скоростью v , врывается в баллистический маятник с массой $m' = km$, висевший неподвижно (см. рисунок). Во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара, и на какую высоту поднимется центр масс маятника с застрявшей в нём пулей?
8. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (16) для скорости пули.



Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§5, 16, 21, 22, 24, 25.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.5 §1,4,5; гл.6 §1,2.

Работа №36. Измерение скорости пули с помощью физического маятника

Цель работы: использовать законы сохранения импульса и механической энергии для измерения скорости пули с помощью физического маятника.

Теоретическое описание

В данной работе физический маятник представляет собой пустотелый цилиндр с массой $m_{\text{ц}}$, заполненный пластилином и закрепленный на длинном стержне с массой $m_{\text{с}}$ и длиной l . Стержень может вращаться на подшипнике с массой $m_{\text{под}}$ вокруг неподвижной закрепленной горизонтальной оси O (рис.8). Летящая со скоростью v пуля с массой $m_{\text{п}}$ застревает в пластине и маятник вместе с застрявшей в нём пулей начинает вращаться вокруг оси O с угловой скоростью ω .

В момент удара, длящегося время τ , со стороны закреплённой оси на маятник действует большая внешняя сила реакции $\vec{F}_{\text{реак}}$, изменяющая импульс системы на величину $\Delta\vec{p} = \vec{F}_{\text{реак}} \cdot \tau$. Однако линия действия этой силы, как и линия действия силы тяжести $(m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}})\vec{g}$, проходит через

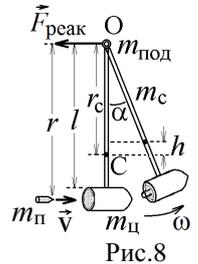


Рис.8

ось O (в момент удара маятник висит неподвижно). Моменты этих сил относительно оси O равны нулю, и можно воспользоваться законом сохранения момента импульса, который справедлив, если сумма моментов внешних сил равна нулю или действием таких моментов сил можно пренебречь. Это следует из основного уравнения динамики вращательного движения, записанного в виде $d\vec{L}_{\text{системы}}/dt = \sum \vec{M}_{\text{внеш}} = 0$, откуда момент импульса $\vec{L}_{\text{системы}} = \text{const}$.

В данной работе, строго говоря, удар происходит не мгновенно. Пуля некоторое время τ продолжает движение в пластине, а маятник за это время отклоняется от положения равновесия, так что центр его масс C слегка отклоняется от вертикали, проходящей через ось подвеса O . Возникает момент силы тяжести, но время удара $\tau \ll T$, где T – период колебаний маятника. За это малое время момент импульса системы пуля-маятник не успевает измениться. До удара он был равен моменту импульса пули $L_{\text{пули}} = m_{\text{п}}v \cdot r$, где r – плечо, т.е. кратчайшее расстояние от линии скорости \vec{v} до оси O (рис.8). После удара маятник и застрявшая в нем пуля имеют общий момент инерции I , начинают вращаться с угловой скоростью ω , и закон сохранения момента импульса запишется как

$$m_{\text{п}}v \cdot r = I\omega \quad (17)$$

до удара после удара

Момент инерции системы пуля-маятник складывается из моментов инерции её частей. Цилиндр вместе с пулей имеет небольшой размер по сравнению с расстоянием l до оси подвеса, поэтому, их общий момент инерции мало отличается от момента инерции материальной точки с массой $m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}$, находящейся на расстоянии r от оси вращения:

$I_{\text{ц}} + I_{\text{п}} = (m_{\text{ц}} + m_{\text{п}})r^2$. Подшипник имеет очень малый размер, и его моментом инерции можно пренебречь. Момент инерции стержня относительно оси O , проходящей через его край, равен $I_{\text{с}} = m_{\text{с}}r^2/3$.

Общий момент инерции системы будет равен

$$I = I_{\text{ц}} + I_{\text{п}} + I_{\text{с}} = \left(m_{\text{ц}} + m_{\text{п}} + \frac{m_{\text{с}}}{3}\right)r^2 \quad (18)$$

После удара пуля движется вместе с маятником. Это абсолютно неупругий удар, при котором механическая энергия системы пуля-маятник не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы,

которую можно найти из соотношения $A_{\text{тр}} = \frac{m_{\text{п}}v^2}{2} - \frac{I\omega^2}{2}$ (разность кинетической энергии поступательного движения пули до удара и кинетической энергии вращающегося маятника после удара). Большая часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

Возникающий при отклонении маятника от положения равновесия момент сил тяжести $\vec{M} = [\vec{r}_{\text{с}}, \sum m\vec{g}]$ начинает тормозить вращение. Расстояние $r_{\text{с}}$ от оси подвеса до центра масс C системы пуля-маятник можно найти из определения радиус-вектора центра масс системы материальных тел с массами m_i , координаты центров масс которых имеют радиусы \vec{r}_i :

$$\vec{r}_{\text{с}} = \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i \quad (19)$$

Для системы пуля-маятник с общей массой $m = m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}} + m_{\text{под}}$, формула (19), как видно из рис.8, даёт

$$r_{\text{с}} = \left(m_{\text{п}}r + m_{\text{ц}}r + m_{\text{с}}\frac{l}{2}\right) / m \quad (20)$$

Кинетическая энергия вращательного движения переходит в потенциальную энергию силы тяжести, которая определяется по высоте h подъёма центра масс:

$$I\omega^2/2 = mgh \quad (21)$$

Эту высоту можно определить по углу отклонения маятника от положения равновесия $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$, измеряемому по круговой шкале (рис. 9):

$$h = r_c (1 - \cos \alpha) = r_c \cdot 2 \sin^2 (\alpha/2). \tag{22}$$

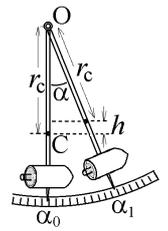


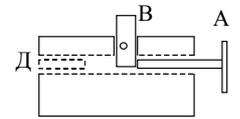
Рис.9

Выразив ω из уравнения (21) и подставляя в (17), получим с учётом (22) скорость пули до соударения с маятником:

$$v = \frac{I\omega}{m_{\text{п}}r} = \frac{\sqrt{2Igh}}{m_{\text{п}}r} \quad \text{или} \quad v = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{m_{\text{п}}r} \sqrt{2Igr_c}. \tag{23}$$

Порядок выполнения работы

1. Зарядить пружинную пушку. Для этого оттянуть назад ударный стержень, взявшись за выступ А. Стержень оттягивать до тех пор, пока другой рукой не удастся поставить выступ В в вертикальное положение, в котором он удерживает стержень и пружину в сжатом состоянии. Затем в дуло Д пушки заложить пулю (левый край пули совместить с торцом Д).



2. Записать начальное положение α_0 острия стержня при неподвижном цилиндре (рис.9). Цена наименьшего деления шкалы 10' (угловых минут).

3. Повернуть выступ В на себя (приведа в горизонтальное положение), отсчитать положение острия α_1 при максимальном отклонении маятника (рис.9)

4. Вычислить угол отклонения маятника $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$. Опыт повторить 5 раз (выстрел производить только по неподвижному маятнику). Найти средний угол отклонения $\langle \alpha \rangle^\circ$ (в угловых градусах).

5. Вычислить массу всей системы "пуля-маятник" по формуле $m = m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}} + m_{\text{под}}$, где $m_{\text{п}}$ – масса пули, $m_{\text{ц}}$ – масса цилиндра, $m_{\text{с}}$ – масса стержня, $m_{\text{под}}$ – масса подшипника. На пуле указана величина её массы, остальные массы указаны на установке. Расстояние r от точки подвеса до центра цилиндра измеряется линейкой.

6. Найти величину момента инерции I всей системы по формуле (18).

7. Определить положение центра масс С системы "пуля-маятник" r_c относительно точки подвеса О (см. рис.9) по формуле (20).

8. Среднюю скорость $\langle v \rangle$ пули перед ударом в маятник рассчитать по формуле (23): $\langle v \rangle = \frac{2 \sin \langle \alpha \rangle}{m_{\text{п}}r} \sqrt{Imgr_c}$.

9. Данные всех измерений и вычислений занести в таблицы 1 и 2.

Таблица 1.

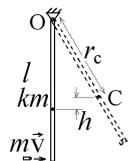
$m_{\text{под}}$, кг	$m_{\text{с}}$, кг	l , м	$m_{\text{ц}}$, кг	r , м	$m_{\text{п}}$, кг	α_0°	m , кг	I , кг·м ²	r_c , м

Таблица 2.

Номер опыта	α_1°	$\alpha^\circ = \alpha_1 - \alpha_0$	$\langle \alpha \rangle^\circ$	$\langle v \rangle$, м/с

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 3б

1. Почему в данной работе можно использовать закон сохранения момента импульса и нельзя применить закон сохранения импульса?
2. Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система “пуля-маятник”?
3. Дайте определение момента силы и момента импульса. По каким формулам определяются эти величины в данной работе? Почему при движении маятника надо учитывать момент силы тяжести и не надо учитывать момент силы реакции в оси подвеса?
4. Какая величина называется моментом инерции? Как вычислить момент инерции системы “пуля-маятник”?
5. Сформулируйте законы сохранения момента импульса и полной механической энергии системы. Будет ли сохраняться механическая энергия системы “пуля-маятник” до и после удара, и если нет – то по какой причине?
6. Какие силы называются консервативными, а какие диссипативными?
7. Что происходит с кинетической энергией системы “пуля-маятник” в момент удара? Какой это удар? При каком ударе она будет сохраняться?
8. Будет ли сохраняться момент импульса и механическая энергия системы “пуля-маятник” при её движении после удара?
9. Пуля с массой m , летевшая со скоростью v , врезается в нижний конец неподвижно висевшего тонкого стержня длины l с массой $m' = km$ и застревает в нём (см. рисунок). Найти: а) расстояние r_c от оси подвеса О до центра масс С стержня с застрявшей пулей; б) высоту h подъёма центра масс С после удара; в) работу сил трения, совершенную в момент удара; г) во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара.
8. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (23) для скорости пули.



Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 21, 24, 26, 27, 32, 34.
 2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.5 §2,6,7; гл.7 §2-5.

Работа №3в. Измерение скорости пули с помощью вращающейся платформы

Цель работы: использовать закон сохранения проекции момента импульса для определения скорости пули при выстреле.

Теоретическое описание

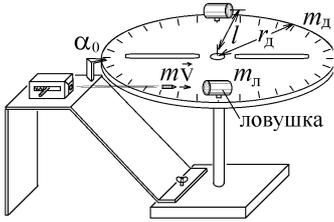


Рис.10

На горизонтально расположенной платформе-диске с массой m_d и радиусом r_d закреплены две симметрично расположенные и заполненные пластилином ловушки с массами m_l (рис.10). Пуля с массой m выстреливается из пружинного пистолета со скоростью v . Винтами пистолет и ловушки закрепляют так, чтобы пуля летела по оси ловушки (рис.10).

Попадая в ловушку, пуля прилипает к пластине, и диск вместе с ловушками и прилипшей пулей начинает вращаться с угловой скоростью, вектор которой $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения диска. Направление этого вектора можно определить по движению вращающегося в ту же сторону винта (правило винта, рис.11).

Вертикально направленная сила тяжести создаёт момент сил $\vec{M}_{mg} = [\vec{r}, m\vec{g}]$, направление которого легче определить по правилу левой руки, как показано на рис.11: четыре пальца левой руки направлены вдоль первого вектора \vec{r} , второй вектор $m\vec{g}$ входит в ладонь, большой палец показывает направление векторного произведения \vec{M}_{mg} .

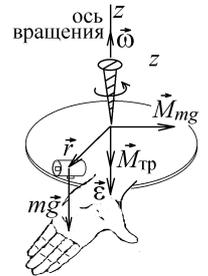


Рис.11

Этот вектор направлен перпендикулярно оси вращения z и не может изменить величину проекции L_z на эту ось момента импульса системы пуля-платформа, равную $L_z = I\omega$, где I – момент инерции системы относительно оси вращения. Однако в подшипнике оси создаётся постоянный момент сил трения $\vec{M}_{тр}$, направленный против вектора $\vec{\omega}$, и тормозящий вращение.

Замкнутой (изолированной) системой будет называться система, на которую не действуют внешние силы и моменты внешних сил, или действием этих моментов можно пренебречь. В такой системе всегда выполняется закон сохранения момента импульса. В данном случае из-за наличия $\vec{M}_{тр}$ система не замкнута, и уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось z , $dL_z/dt = I\epsilon = -M_{тр}$ приводит к уменьшению величины $L_z = I\omega$.

Однако соударение происходит очень быстро, за время $\tau = \Delta t \rightarrow 0$, и можно считать, что $\Delta L_z = -M_{тр} \cdot \tau \rightarrow 0$. Проекция на ось z момента импульса пули равна $\vec{L}_{пули} = [\vec{r}, m\vec{v}]$, где $r = l$ – расстояние от центра ловушки до оси. Она не успевает измениться, и можно записать закон сохранения момента импульса в момент удара:

$$\begin{matrix} m v \cdot l & = & I \omega \\ \text{до удара} & & \text{после удара} \end{matrix} \quad (24)$$

Момент инерции системы пуля-платформа складывается из моментов инерции диска $I_d = m_d r_d^2 / 2$, маленькой пули $I_{п} = ml^2$ и двух ловушек, размерами которых тоже можно пренебречь, $I_l = 2m_l l^2$. В результате:

$$I = \frac{m_d r_d^2}{2} + 2m_l l^2 + ml^2 \quad (25)$$

(если при проведении работы окажется, что ловушки имеют разные массы и разные расстояния до оси вращения, то в формуле (25) надо заменить $2m_l l^2 \rightarrow m_{л1} l_1^2 + m_{л2} l_2^2$).

При попадании пули в ловушку происходит абсолютно неупругий удар, при котором механическая энергия системы не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти как разность кинетической энергии поступательного движения пули до удара и кинетической энергии вращающейся

платформы после удара: $A_{тр} = \frac{m_{п} v^2}{2} - \frac{I \omega^2}{2}$. Большая часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

Момент сил трения тормозит вращение платформы, и она остановится спустя время t после удара, повернувшись на угол ϕ , измеряемый по круговой шкале, нанесенной на край платформы. Для равнозамедленного вращения, происходящего с постоянным угловым ускорением ϵ и с начальной угловой скоростью ω , можно записать два кинематических соотношения:

$$0 = \omega - \epsilon t \quad \text{и} \quad \phi = \omega t - \frac{\epsilon t^2}{2} \quad (26)$$

Исключая отсюда переменную t , получаем

$$\omega = \sqrt{2\epsilon\phi} \quad (27)$$

Чтобы определить величину углового ускорения ϵ , входящего в это выражение, надо слегка толкнуть рукой диск платформы, одновременно включив секундомер, и измерить время t до полной остановки вращения платформы на угол α . Тогда, исключая из равенств (26) неизвестную начальную угловую скорость ω , получим известное кинематическое

выражение $\alpha = \varepsilon t^2/2$ или $\varepsilon = 2\alpha/t^2$.

Окончательно из формул (24), (25) и (27) находим величину скорости пули до удара:

$$v = \frac{I}{ml} \sqrt{2\varepsilon\varphi}. \tag{28}$$

Порядок выполнения работы

1. Массы диска m_d , ловушки m_l и пули m указаны на установке или на самих телах.
2. Установить ловушки симметрично на произвольном расстоянии l от оси вращения диска (платформы), закрепить их (отверстием, заполненным пластилином в сторону пистолета). Измерить линейкой расстояние l от оси вращения до центра ловушки (рис.10).
3. Толкнуть диск рукой и включить секундомер. Определить на какой угол α повернется диск и какое время t проходит до его остановки (рис.10). Опыт проделать $n = 9$ раз, определяя каждый раз углы α_i и времена t_i .
4. Из-за действия постоянного момента сил трения в оси вращения диск (платформа) движется равнозамедленно.

По формуле $\varepsilon_i = \frac{2\langle\alpha_i\rangle}{\langle t_i\rangle^2}$ вычислить величину углового ускорения в каждом из опытов, а затем найти среднее значение уг-

лового ускорения платформы, вызванного трением в оси: $\langle\varepsilon\rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i / n$.

5. Зарядить пружинный пистолет и повернуть его так, чтобы при выстреле пуля попала в ловушку, которая должна быть ориентирована по касательной к траектории движения вылетающей из пистолета пули.
6. Произвести выстрел. Определить угол поворота φ диска до остановки. Опыт повторить $n = 9$ раз, определяя каждый раз величину угла φ_i° , затем вычислить среднее значение $\langle\varphi\rangle^\circ = \sum_{i=1}^n \varphi_i^\circ / n$. Величину этого угла, измеренного в градусах надо перевести в радианы по формуле $\langle\varphi\rangle = 3,142 \cdot \langle\varphi_i^\circ\rangle / 360^\circ$.
7. Определить момент инерции I диска с ловушками и пуль по формуле (25).
8. Определить скорость пули по формуле (28): $\langle v\rangle = \frac{I}{ml} \sqrt{2\langle\varepsilon\rangle\langle\varphi\rangle}$.
9. Данные всех измерений и вычислений занести в таблицы 1-3.

Таблица 1.

m , кг	m_d , кг	m_l , кг	r_d , м	l , м

Таблица 2.

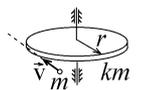
α_i°	t_i , с	ε_i , рад/с ²	φ_i°
		$\langle\varepsilon\rangle = \dots\dots$ рад/с ²	$\langle\varphi\rangle^\circ = \dots\dots^\circ$ $\langle\varphi\rangle = \dots\dots$ рад

Таблица 3.

I , кг·м ²	$\langle v\rangle$, м/с

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 3б

1. Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система “пуля-платформа”?
2. Дайте определение момента силы и момента импульса. По каким формулам они определяются в данной работе и как определить направление этих векторных величин?
3. Какая величина называется моментом инерции? Как вычислить момент инерции системы “пуля-платформа” после удара?
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. Будет ли сохраняться его величина во время удара, и если да – то как записать уравнение этого закона для системы “пуля-платформа”?
5. Какие силы называются консервативными, а какие диссипативными?
6. Сформулируйте закон сохранения и изменения полной механической энергии системы. Что происходит с кинетической энергией системы “пуля-платформа” при ударе? При каком ударе она сохраняется?
7. Будет ли сохраняться момент импульса и механическая энергия системы “пуля-платформа” при её движении после удара?
8. Маленький пластилиновый шарик с массой m летел по касательной к ободу тонкого неподвижного диска с массой $m' = km$ и с радиусом r и прилип к нему (см. рисунок). Совершив равнозамедленно один полный обо-



рот вокруг закрепленной оси симметрии, диск остановился. Найти: а) величину углового ускорения диска с прилипшим шариком во время его вращения; б) величину момента сил трения в оси диска; в) работу сил трения, совершенную в момент удара; г) во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара.
 9. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (28) для скорости пули.

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 21, 24, 27, 32, 33, 34.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.5 §2,6,7; гл.7 §2-5.

Работа №4. Изучение вращательного движения

Цель работы: с помощью маятника Обербека изучить зависимость углового ускорения тела, вращающегося относительно неподвижной оси, от результирующего момента действующих на него сил; определить момент инерции вращающегося маятника и действующий в его оси момент сил трения.

Теоретическое описание

Для изучения законов динамики вращательного движения используется **маятник Обербека** – на шкив небольшого радиуса r намотана невесомая нить, к которой прикреплён груз массы m . Шкив может вращаться вокруг горизонтальной закрепленной оси O . Для создания большого момента инерции шкив соединён с двумя перпендикулярными массивными стержнями, на которых могут быть закреплены симметрично расположенные грузы массы m_1 (рис.12).

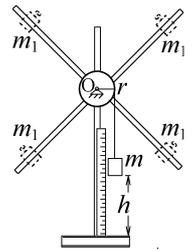


Рис.12

Маятником такое устройство называется потому, что, опускаясь, груз m раскручивает шкив со стержнями. Когда нить размотается полностью, система продолжит вращение, наматывая нить на шкив до полной остановки груза m . Потом груз снова начнёт опускаться, вращая шкив в противоположную сторону и т.д. Система периодически вращается то в одну, то в другую сторону, аналогично колебаниям маятника.

В данной работе нить имеет большую длину и, падая вниз с высоты h с ускорением \bar{a} без начальной скорости, груз m упадёт на подставку за время t , измеряемое секундомером. Простое кинематическое соотношение $h = at^2/2$ позволяет по измеренным величинам h и t определить величину ускорения груза m , совершающего поступательное движение, и углового ускорения вращающегося шкива:

$$\epsilon = a/r = 2h/t^2 r . \tag{29}$$

Силы, действующие при этом на шкив и на груз, показаны на рис.13. Уравнение динамики поступательного движения груза m запишется, как $ma = mg - T$ и позволяет найти силу натяжения нити:

$$T = m(g - a) = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right). \tag{30}$$

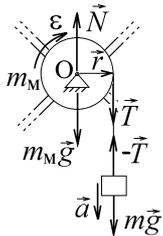


Рис.13

Центр масс шкива находится на его оси и неподвижен. Поэтому действующие на шкив с общей массой m_M сила тяжести $m_M \bar{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и сила реакции в точке опоры \vec{N} уравновешены:

$m_M g + T - N = 0$. При этом линии действия сил $m_M \bar{g}$ и \vec{N} проходят через ось вращения O (рис.13) и не создают вращающих моментов сил. Шкив будет вращаться под действием силы натяжения нити, создающей момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{T}]$. Этот вектор направлен вдоль оси вращения шкива, как и вектор углового ускорения $\vec{\epsilon}$. Это можно определить, например, используя “правило левой руки” (см. рис.11). Величину вращающего шкив момента сил согласно (30) можно вычислить по формуле

$$M = Tr = mr\left(g - \frac{2h}{t^2}\right). \tag{31}$$

В оси вращения при этом действует момент сил трения $\vec{M}_{тр}$, направленный в противоположную сторону и тормозящий вращение. Основное уравнение динамики вращательного движения маятника в проекции на ось вращения запишется в виде $I\epsilon = M - M_{тр}$, где I - момент инерции маятника (шкива с прикрепленными к нему стержнями). Зависимость углового ускорения ϵ от вращающего маятник момента сил M линейна, если момент сил трения не зависит от скорости вращения:

$$\epsilon = (M - M_{тр})/I . \tag{32}$$

Меняя массу m подвешенного к нити груза, измеряем время его падения с высоты h , и по формулам (29) и (31) вычисляем несколько значений углового ускорения ϵ при разных величинах M . По этим значениям строим график линейной зависимости $\epsilon = \epsilon(M)$ (рис.14).

По этому графику, согласно (32), можно определить момент инерции маятника Обербека $I = \frac{\Delta M}{\Delta \epsilon}$ и величину постоянного момента сил трения $M_{тр}$, отмеченного на рис.14. Для этого оси графика должны начинаться в точке $\epsilon = 0$.

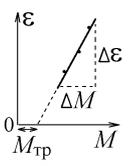
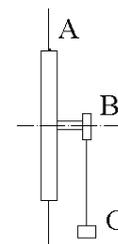


Рис.14

Порядок выполнения работы

1. Вращая маятник за стержни А, намотать нить на шкив В и поднять груз С массой m , указанной на нем, на максимально возможную высоту h и измерить ее линейкой (см. рис.12).

2. Измерить время падения груза. Для этого, придерживая одной рукой маятник за любой из стержней, другой коснуться головки секундомера. Одновременно нажать головку секундомера и отпустить стержень маятника. В момент удара груза о подставку снова нажать на головку секундомера, остановив его. По секундомеру отсчитать время t падения груза. Опыт повторить 5 раз, поднимая груз на одну и ту же высоту h . Определить среднее время $\langle t \rangle$ падения груза. По формулам (31) и (29) подсчитать вращаю-



щий момент $M = m \left(g - \frac{2h}{\langle t \rangle^2} \right) r$ и угловое ускорение вращения $\epsilon = \frac{2h}{\langle t \rangle^2} r$. Здесь $r = 2$ см – радиус шкива В,

на который намотана нить.

3. Те же самые измерения и расчеты проделать, добавляя к висящему на нити грузу грузы-довески (масса каждого довеска указана на нем).

4. Данные измерений и вычислений занести в таблицу.

5. По трем вычисленным точкам ϵ и M построить график зависимости $\epsilon(M)$, аналогичный приведенному на рис.14.

6. По графику определить:

а) момент инерции крестовины $I = \frac{\Delta M}{\Delta \epsilon} = \dots, \text{кг} \cdot \text{м}^2$;

б) момент силы трения в оси вращения $M_{\text{тр}} = \dots \text{Н} \cdot \text{м}$.

m , кг	t , с	$\langle t \rangle$, с	ϵ , с ⁻²	M , Н·м

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 4

1. Как устроен маятник Обербека и почему он называется маятником?

2. Дайте определение векторов углового ускорения и момента сил. Как определить направление этих векторов? Куда направлены векторы $\vec{\epsilon}$, \vec{M} и $\vec{M}_{\text{тр}}$ на рисунках 12 или 13?

3. Запишите уравнения, описывающие поступательное движение подвешенного груза и вращательного движения шкива с крестовиной.

4. Как связаны ускорение a груза m и угловое ускорение шкива ϵ ?

5. Каким образом в данной работе определяются величины углового ускорения ϵ и вращающего момента сил M ?

6. Почему на вращение шкива с крестовиной не оказывают влияние действующие на них сила тяжести и сила реакции в оси подвеса?

7. Каким образом в данной работе определяются величины момента инерции маятника и момента сил трения в его оси?

8. При массе подвешенного на нити груза $m \leq m_0$ он будет висеть, не опускаясь вниз. Найдите величину массы m_0 , считая момент сил трения в оси постоянным.

9. Диск (цилиндр) с массой $m' = km$ и с радиусом r может вращаться без трения вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О (рис.А). К намотанной на него невесомой нити прикреплен груз массы m . Записав уравнения динамики, определите величину ускорения груза a . g – ускорение свободного падения.

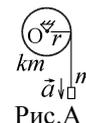


Рис.А

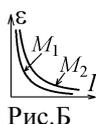


Рис.Б

10. В опыте на рис.12 меняют момент инерции I крестовины, меняя массу прикрепляемых к ней грузов m_1 . На рис.Б показаны два графика зависимости её углового ускорения от величины I при двух постоянных вращающих моментах сил M_1 и M_2 . Какой из этих моментов больше и почему?

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 26, 31, 32.
 2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.7 §1-5.

Работа №5. Определение моментов инерции методом колебаний

Цель работы: экспериментальное определение моментов инерции однородного стержня относительно двух параллельных осей; проверка теоремы Штейнера.

Теоретическое описание

Моментом инерции материальной точки называется произведение её массы m на квадрат расстояния r до оси вращения. Разбивая физическое тело на маленькие участки, которые можно считать материальными точками, складываем их моменты инерции, получая величину момента инерции тела относительно данной оси вращения $I_{\text{физ.тела}} = \sum m_i r_i^2$ (рис.15). Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Чем больше величина I , тем труднее заставить вращаться массивное тело, если оно покоилось, или затормозить, если оно вращалось.



Рис.15

Если известен момент инерции тела I_C относительно оси вращения, проходящей через центр масс C , то вычислить момент инерции I_A этого тела с массой m относительно любой другой параллельной оси вращения A , находящейся на расстоянии d , можно с помощью теоремы Штейнера:

$$I_A = I_C + md^2. \quad (33)$$

В данной работе выполнение теоремы Штейнера проверяется на примере тонкого стержня с массой m и длиной l (рис.15). Чтобы найти момент инерции I_C , разбиваем стержень на крошечные участки длиной dx с массой $dm = dx \cdot m/l$. Момент инерции такого участка (материальной точки) относительно оси C , как видно из рис.16, равен $dI_C = dm \cdot x^2$. Момент инерции тонкого стержня относительно перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр масс, будет равен сумме (интегралу), взятой по всей длине стержня:

$$I_C = \int dI_C = \int_{-l/2}^{+l/2} dx \frac{m}{l} \cdot x^2 = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-l/2}^{x=l/2} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (34)$$

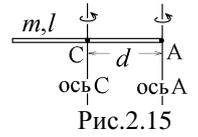


Рис.2.15

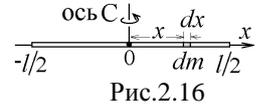


Рис.2.16

Тогда момент инерции относительно параллельной оси A , проходящей через край стержня, согласно (33) должен быть равен

$$I_A = I_C + m(l/2)^2 = \frac{1}{3} ml^2. \quad (35)$$

Для проверки теоремы Штейнера (35) моменты инерции I_A и I_C определяются экспериментально методом малых колебаний, которые происходят по гармоническому закону. Вначале стержень длины l подвешивают на двух нитях длины b в горизонтальном положении (рис.17,а) и поворачивают в горизонтальной плоскости на **малый** угол $\varphi_0 \approx 4^\circ$. Если угол мал, то нити подвеса отклоняются от вертикали на малый угол θ_0 , а край стержня отклоняется от первоначального положения на малое расстояние Δx практически в горизонтальной плоскости. Это расстояние, как дугу окружности, можно выразить через малые углы, которые надо взять в радианах:

$\Delta x \approx b\theta_0$ и $\Delta x \approx (l/2) \cdot \varphi_0$ (рис.17,а), что даёт связь между углами:

$$\varphi_0 = 2b\theta_0/l. \quad (36)$$

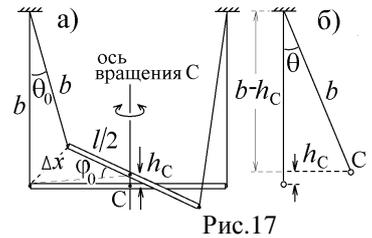


Рис.17

При таком повороте центр масс C стержня поднимается на высоту h_C . Если стержень аккуратно отпустить, он будет совершать малые колебания в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси C , проходящей через центр масс, с периодом T_C , циклической частотой $\omega_C = 2\pi/T_C$ и начальной амплитудой φ_0 . Если нити подвеса идеальны и не деформируются при отклонении, то колебания будут гармоническими: $\varphi = \varphi_0 \cos \omega_C t$. В действительности из-за деформации этих нитей и возникающих в точках подвеса диссипативных сил трения колебания постепенно затухают. Можно считать, что только при первых 5-15 колебаниях их амплитуда не успевает заметно измениться, и можно использовать формулу незатухающих гармонических колебаний.

Величина угловой скорости вращения стержня $\omega = d\varphi/dt$ будет максимальной при $\varphi = 0$, когда стержень опустится: $\omega_{\max} = \varphi_0 \omega_C = 2\pi\varphi_0/T_C$. При этом потенциальная энергия стержня, поднятого на высоту h_C , перейдёт в кинетическую энергию его вращения:

$$mgh_C = I_C \omega_{\max}^2 / 2 = 2\pi^2 \varphi_0^2 I_C / T_C^2. \quad (37)$$

Высоту подъёма центра масс стержня можно найти, посмотрев на него сбоку (рис.17,б). При малом угле поворота $\theta \approx \theta_0$ и

$$h_C = b(1 - \cos \theta_0) = b \cdot 2 \sin^2(\theta_0/2) \approx b\theta_0^2/2. \quad (38)$$

Подставляя (38) и (36) в (37) получаем формулу для момента инерции I_C , записанную через период малых колебаний

$$I_C = \frac{mgl^2}{16\pi^2 b} T_C^2. \quad (39)$$

Теперь подвесим стержень за колечко на его краю и заставим совершать **малые** колебания в вертикальной плоскости вокруг оси подвеса A (рис.18). Это – физический маятник. Если пренебречь малым моментом сил трения в оси, можно считать, что его первые 5-15 колебаний будут гармоническими колебаниями $\theta = \theta_0 \cos \omega_A t$ с амплитудой θ_0 : циклической частотой $\omega_A = 2\pi/T_A$ и периодом $T_A = 2\pi\sqrt{I_A/mgd}$ (период колебаний физического маятника, где $d = l/2$ - расстояние от центра масс до оси подвеса).

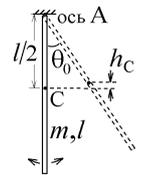


Рис.18

При отклонении стержня на максимальный угол θ_0 центр его масс C поднимается на высоту

$$h_C = \frac{l}{2}(1 - \cos \theta_0) = \frac{l}{2} \cdot 2 \sin^2(\theta_0/2) \approx \frac{l}{4} \theta_0^2, \quad (40)$$

а стержень приобретает потенциальную энергию mgh_C , которая определяется положением центра масс. В нижней точке эта энергия переходит в кинетическую энергию вращательного движения с максимальной угловой скоростью $\omega_{\max} = |d\theta/dt|_{\max} = \theta_0 \omega_A = 2\pi\theta_0/T_A$:

$$mgh_C = I_A \omega_{\max}^2 / 2 = 2\pi^2 \theta_0^2 I_A / T_A^2. \quad (41)$$

Подставляя (40) в (41), получаем формулу для момента инерции I_A , записанную через период малых колебаний относи-

тельно оси А:

$$I_A = \frac{mgl}{8\pi^2} T_A^2 \tag{42}$$

Проверка выполнения теоремы Штейнера в данной работе заключается в проверке соотношения (33):

$$I_A - I_C = ml^2/4, \tag{43}$$

где величины I_A и I_C вычисляются с помощью формул (42) и (39).

Порядок выполнения работы

1. Подвесить стержень на нитях строго горизонтально, расположив его между направляющими планки.
 2. Взяться за правую направляющую, подвести к стержню и повернуть его на угол 4°. Затем резко развернуть направляющую планку от стержня, предоставив ему возможность совершать крутильные колебания относительно оси С, как показано на рис.17,а.

3. Измерить секундомером время t_C полных n колебаний ($n = 10$, отсчет времени начинать при прохождении колеблющегося стержня любого крайнего положения). Рассчитать период колебаний $T_{Ci} = \frac{t_{Ci}}{n}$. Опыт повторить 9 раз и определить среднее значение периода $\langle T_C \rangle$.

4. Линейкой измерить l - расстояние между точками подвеса стержня и b - длину нитей подвеса (рис.17,а). Масса стержня (в граммах) указана на нем.

5. Подвесить стержень за конец А и заставить колебаться в вертикальной плоскости. Угол отклонения не должен превышать 4°. (см. рис.18).

6. Измерить время t_A $n=10$ полных колебаний стержня и вычислить период колебаний $T_{Ai} = \frac{t_{Ai}}{n}$. Опыт проделать 9 раз и определить среднее значение периода $\langle T_A \rangle$.

7. По формулам (39) и (42) и вычислить моменты инерции стержня относительно перпендикулярных ему, но параллельных друг другу осей, проходящих через центр масс $I_C = \frac{mgl^2}{16\pi^2 b} \langle T_C \rangle^2$ и через край стержня $I_A = \frac{mgl}{8\pi^2} \langle T_A \rangle^2$.

8. Случайные отклонения каждого измерения периодов равны соответственно, $\Delta T_{Ci} = T_{Ci} - \langle T_C \rangle$ и $\Delta T_{Ai} = T_{Ai} - \langle T_A \rangle$, а средние квадратичные отклонения: $S_C = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_{Ci})^2}$, $S_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_{Ai})^2}$. Погрешности результатов измерения периодов $\Delta T_C = S_C / \sqrt{n}$, $\Delta T_A = S_A / \sqrt{n}$.

9. Рассчитать относительные и абсолютные погрешности по формулам $E_C = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_C}{\langle T_C \rangle}\right)^2}$; $E_A = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_A}{\langle T_A \rangle}\right)^2}$; $\Delta I_C = E_C \cdot I_C$; $\Delta I_A = E_A \cdot I_A$.

10. Вычислить величины $I_A - I_C$ и $ml^2/4$ и сравнить их значения, которые должны совпасть согласно (43).

11. Данные измерений и вычислений занести в таблицы 1-4.

Таблица 1.

n	t_{Ci}, c	T_{Ci}, c	$\Delta T_{Ci}, c$	$(\Delta T_{Ci})^2, c^2$
$\langle T_C \rangle = \dots\dots, c;$ $S_C = \dots\dots, c;$ $\Delta T_C = \dots\dots, c;$				

Таблица 2.

n	t_{Ai}, c	T_{Ai}, c	$\Delta T_{Ai}, c$	$(\Delta T_{Ai})^2, c^2$
$\langle T_A \rangle = \dots\dots, c;$ $S_A = \dots\dots, c;$ $\Delta T_A = \dots\dots, c;$				

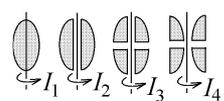
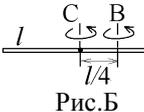
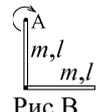
Таблица 3.

$m, кг$	$\Delta m, кг$	$l, м$	$\Delta l, м$	$b, м$	$\Delta b, м$

Таблица 4.

$I_C, кг \cdot м^2$	$\Delta I_C, кг \cdot м^2$	$I_A, кг \cdot м^2$	$\Delta I_A, кг \cdot м^2$	$I_A - I_C, кг \cdot м^2$	$m \frac{l^2}{4}, кг \cdot м^2$

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 5

1. Дайте определение и объясните физический смысл момента инерции материальной точки и физического тела.
 2. Каким образом вычислить момент инерции тела относительно оси симметрии, проходящей через центр масс? Сделайте этот вывод для тонкого стержня, для тонкого кольца, для сплошного диска.
 3. Сформулируйте теорему Штейнера. Каким образом эта теорема проверяется в данной работе?
 4. Из одинаковых тонких жестяных деталей в виде эллипса сделали, разрезав их на части, и раздвинув на одинаковые расстояния от оси вращения, четыре плоские фигуры (рис.А). Расставьте моменты инерции I_i этих фигур в порядке возрастания их величин и объясните свой ответ.
- 
- Рис.А
5. Тонкий стержень массы m и длины l имеет момент инерции $I_C = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ относительно перпендикулярной оси С, проходящей через его центр (рис.Б). Чему равен его момент инерции относительно параллельной оси В, находящейся на расстоянии $l/4$?
 6. Два одинаковых тонких стержня с массой m и длиной l каждый приварены концами под прямым углом друг к другу. Найдите момент инерции этого угольника относительно перпендикулярной оси А, показанной на рис.В.
 7. Получите связь между максимальной угловой скоростью стержня и амплитудой его колебаний. Как эта скорость связана с изменением высоты центра масс колеблющегося стержня?
 8. Проделайте и объясните вывод соотношений (39) и (42).
- 
- Рис.Б
- 
- Рис.В

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 39, 41, 54.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.5 §5; гл.7 §2-4; гл.9 §1,2.

Работа №6. Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика

Цель работы: изучить законы движения катающегося по сферической вогнутой поверхности шарика, рассмотреть условия возникновения его гармонических колебаний и определить радиус кривизны поверхности.

Теоретическое описание

Используемый в работе метод определения радиуса кривизны основан на измерении периода малых колебаний шарика, катающегося по исследуемой вогнутой поверхности. При качении без проскальзывания скорость точки А шарика, касающейся неподвижной поверхности, равна нулю. Поэтому длина дуги ВС, которую опишет точка В на поверхности катающегося шарика радиуса r , равна длине дуги АС вогнутой поверхности радиуса R (рис.19): $s_{AC} = R\phi = s_{BC} = r\theta$. Углы θ и ϕ , указанные на рис.19 и измеренные в радианах связаны соотношением

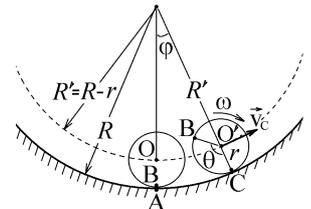
$$\theta = R\phi/r. \tag{44}$$


Рис.19

На рис.20 показано, как меняется направление полного ускорения центра масс шарика $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, складывающееся из тангенциального \vec{a}_τ и нормального \vec{a}_n ускорений. В верхней точке подъема А скорость шарика и его нормальное ускорение $a_n = v^2/R$ равны нулю, а ускорение шарика равно его тангенциальному ускорению. В нижней точке траектории В скорость шарика максимальна и её производная в точке максимума, т.е. тангенциальное ускорение, равна нулю: $a_\tau = dv/dt = 0$. В промежуточных точках траектории вектор \vec{a} поворачивается, как показано на рис.20.

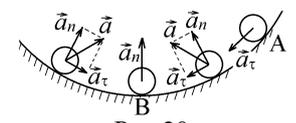


Рис.20

Силы тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции \vec{N} и сила трения сцепления $\vec{F}_{тр}$, действующие на шарик, показаны на рис.21. Скорость центра масс шарика $v_C = ds/dt$ направлена вправо, увеличивая проходимый им путь $s = OO' = R'\phi$. Тангенциальное ускорение направлено противоположно. Его проекция на касательное к траектории направление будет равна

$$a_\tau = -\frac{d^2s}{dt^2} = -(R-r)\frac{d^2\phi}{dt^2}. \tag{45}$$

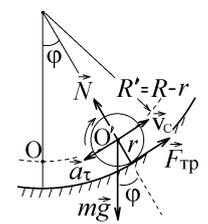


Рис.21

Проекция векторов угловой скорости и углового ускорения шарика также имеют разные знаки и связаны с углом поворота шарика вокруг своей оси: $\omega = d\theta/dt$, $\epsilon = -d^2\theta/dt^2$. Учитывая (45) и (44), находим связь тангенциального и углового ускорения шарика при качении по сферической поверхности:

$$a_\tau = -R' \cdot \frac{r}{R} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{R-r}{R} r\epsilon. \tag{46}$$

Запишем уравнение динамики поступательного движения центра масс шарика в проекции на касательное направление, а также уравнение динамики вращательного движения шарика вокруг своей оси, в котором торможение вращения происходит из-за действия момента силы трения сцепления, а момент инерции шарика $I_C = 2mr^2/5$ (рис.21):

$$ma_\tau = mg \sin \phi - F_{тр}; \quad I_C \epsilon = F_{тр} \cdot r. \tag{47}$$

Последовательно исключаем из этих уравнений неизвестную $F_{тр}$, затем подставляем ϵ из (46), затем – выражение для

a_τ из (45). Получим уравнение
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{5g}{7R-5r} \sin\varphi = 0. \tag{48}$$

Это уравнение совпадает с динамическим уравнением незатухающих собственных гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0 \tag{49}$$

в том случае, когда $\sin\varphi \approx \varphi$, т.е. угол отклонения шарика от положения равновесия должен быть малым: $\varphi \leq 5^\circ - 10^\circ$. Уравнение (49) имеет решение в виде $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$.

Напомним, что физическое тело будет совершать гармонические колебания, если на него действует сила или момент силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия. Именно такой момент сил возвращает шарик в нижнюю точку траектории, стремясь уменьшить угол φ . Из соотношений (45)–(47) можно найти его величину, пропорциональную величине φ при малых углах: $M_{тр} = F_{тр} \cdot r \approx \frac{2mrR}{7R-5r} g \cdot \varphi$.

Из-за наличия момента сил трения реальные колебания шарика при проведении опыта будут затухать, и использовать приближение гармонических колебаний можно только с оговоркой, что их амплитуда за время колебаний изменится мало. Поэтому для определения периода следует измерять время не более $N = 4-5$ полных колебаний, хотя для более точного измерения его величины $T = t/N$ желательно измерить секундомером время как можно большего числа колебаний.

Циклическая частота незатухающих малых колебаний катающегося по сферической поверхности шарика следует из сравнения уравнений (48) и (49): $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{5g}{7R-5r}}$. Из этого соотношения получаем расчётную формулу для величины радиуса вогнутой поверхности, выраженного через измеряемый секундомером период колебаний T_0 :

$$R = \frac{5}{7} g \frac{T_0^2}{4\pi^2} + \frac{5}{7} r. \tag{50}$$

Это выражение может дать неточный результат из-за двух причин:

- 1) реальный период колебаний $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ зависит от коэффициента затухания β , который был принят равным нулю;
- 2) при колебаниях шарик отклоняется от положения на большой угол, для которого не выполнено условие $\sin\varphi \approx \varphi$.

Порядок выполнения работы

1. С помощью микрометра измерить диаметр d шарика $n_1 = 5$ раз в разных местах. Занести данные в таблицу 1.
2. Вывести шарик из положения равновесия так, чтобы угол отклонения φ (см.рис.19) был мал. Определить время t пяти ($n_1 = 5$) полных колебаний шарика. Опыт провести $n = 9$ раз, определяя период колебаний $T_i = t_i / n$. Занести данные в таблицу 2.

3. Вычислить средние значения диаметра $\langle d \rangle$ и радиуса шарика $\langle r \rangle = \langle d \rangle / 2$, а также периода колебаний $\langle T \rangle$.

4. Определить случайные отклонения $\Delta T_i = T_i - \langle T \rangle$ каждого измерения периода, а также среднее квадратичное отклонение $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_i)^2}$. Вычислить погрешность ΔT результата измерений: $\Delta T = S / \sqrt{n}$.

5. Аналогично вычислить погрешность измерения диаметра и радиуса $\Delta d = \sqrt{\frac{1}{n_1(n_1-1)} \sum (d_i - \langle d \rangle)^2}$ и $\Delta r = \Delta d / 2$.

6. По формуле (50) вычислить радиус кривизны поверхности $\langle R \rangle = \frac{5}{7} g \frac{\langle T \rangle^2}{4\pi^2} + \frac{5}{7} \langle r \rangle$.

7. Найти абсолютную ΔR и относительную E погрешности в определении радиуса кривизны вогнутой поверхности R по формулам

$$\Delta R = \frac{2 \langle R \rangle \Delta T}{\langle T \rangle} + \Delta r \quad \text{и} \quad E = \frac{\Delta R}{\langle R \rangle} \times 100\% .$$

8. Данные измерений и вычислений занести в таблицы 1-3.

Таблица 1.

d , м	$\langle d \rangle$, м	$\langle r \rangle$, м

Таблица 3.

S , с	ΔT , с	Δr , м	R , м	ΔR , м	E , %

Таблица 2.

t_i , с	n_1	T_i , с	ΔT_i , с	$(\Delta T_i)^2$, с
$\langle T \rangle = \dots\dots\dots$				

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 6

1. По каким формулам рассчитываются тангенциальное, нормальное, полное и угловое ускорение шарика?
2. Маленький шарик совершает колебания, катаясь по вогнутой поверхности между точками А и В (рис.А). В каких точках угловая скорость и угловое ускорение шарика будут равны нулю? В каких точках они будут максимальны и почему?
3. В каких точках траектории шарика на рис.А его тангенциальное и нормальное ускорения будут равны нулю? Может ли вектор полного ускорения шарика быть направлен параллельно или перпендикулярно вектору ускорения свободного падения \vec{g} ?
4. Как связаны величины тангенциального a_t и нормального a_n ускорения шарика с величинами угловой скорости ω и углового ускорения ϵ ?
5. Какой будет связь между a_t и ϵ в данной работе и почему?
6. Шарик катится по плоской поверхности со скоростью v без проскальзывания. Какими будут величины скоростей точек А, В и С на его поверхности (рис.Б)?
7. Укажите все силы и моменты сил, действующие на катящийся шарик, и запишите уравнения динамики его поступательного и вращательного движения.
8. При каком условии шарик будет совершать гармонические колебания? Почему угол отклонения шарика от положения равновесия должен быть мал?
9. Прodelайте и объясните вывод формул (46) – (47). Получите расчетную формулу (50).
10. Используя эти формулы, получите выражение для силы трения сцепления $F_{тр}$, действующей на шарик.
11. В нижней точке вогнутой поверхности катящийся без проскальзывания шарик с массой m и с радиусом r имеет скорость v . На какую максимальную высоту h может подняться вверх его центр масс (рис.В)?
12. По каким причинам полученная в работе величина радиуса кривизны поверхности может отличаться от истинного значения?

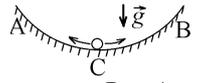


Рис.А

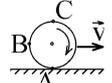


Рис.Б

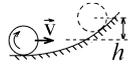


Рис.В

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 4, 24, 41-43, 53.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.7 §1-5; гл.9 §1,2;

Работа №6а. Определение момента инерции методом крутильных колебаний

Цель работы: изучить метод крутильных колебаний, используемый для расчета момента инерции тел разной формы. Сравнить экспериментально полученные значения моментов инерции этих тел с теоретическими расчетами.

Теоретическое описание

К краям неподвижного верхнего диска Д с радиусом r на трёх симметрично расположенных нитях длины l подвешена круговая платформа радиуса R (трифилярный подвес, рис.22). В центр платформы помещают тело массы m , момент инерции которого необходимо измерить. При закручивании нитей на малый угол платформа будет совершать малые колебания с периодом T в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси симметрии OO' , одновременно поднимаясь и опускаясь с периодом $T_{верт} = T/2$.

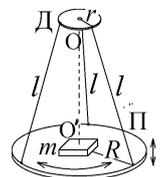


Рис.22

Определим высоту h подъема платформы при её закручивании в горизонтальной плоскости на малый угол ϕ . Совместим начало координат O с центром платформы. В положении равновесия расстояние

$$z = OO' \text{ было равно } z = CA = \sqrt{BA^2 - BC^2} = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} \quad (51)$$

(см. рис.23,а). После поворота платформы на угол ϕ это расстояние стало равным

$z' = AC' = \sqrt{B'A^2 - B'C'^2}$, где $B'A=BA=l$ – длина нити, а расстояние $B'C'$ можно найти из треугольника $B'C'O$ со сторонами $B'O=R$, $C'O=r$ и углом ϕ между ними по теореме косинусов (см. рис.23,б):

$B'C'^2 = B'O^2 + C'O^2 - 2B'O \cdot C'O \cdot \cos \phi = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi$. Тогда

$$z' = AC' = \sqrt{l^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \phi} \quad (52)$$

Из соотношений (52) и (51) следует, что $z'^2 = z^2 - 2Rr(1 - \cos \phi) = z^2 - 2Rr \cdot 2 \sin^2(\phi/2)$. Если угол поворота мал, то

$$\sin(\phi/2) \approx \phi/2 \text{ и } z' = \sqrt{z^2 - Rr\phi^2} = z\sqrt{1 - Rr\phi^2/z^2} \quad (53)$$

Воспользуемся теперь формулой разложения в ряд Тейлора $(1 \pm \epsilon)^\alpha \approx 1 \pm \alpha\epsilon + O(\epsilon^2)$. В нашем случае малой величиной будет $\epsilon = \frac{Rr\phi^2}{z^2} \ll 1$, и из формулы (53) следует $z' \approx z \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Rr\phi^2}{z^2} \right)$.

Высота подъема платформы, как видно из рис.23,б, будет равна $h = z - z' = \frac{Rr\phi^2}{2z} = \frac{Rr\phi^2}{2\sqrt{l^2 - (R-r)^2}}$. (54)

Напомним, что физическое тело совершает гармонические колебания, если на него действует сила или момент

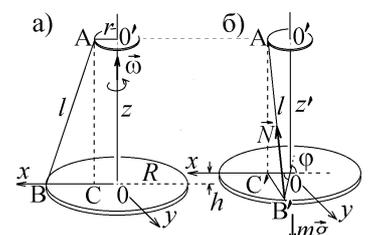


Рис.23

силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия.

При повороте платформы на малый угол φ против часовой стрелки, как показано на рис.24, нить отклоняется на значительно меньший угол θ , пропорциональный углу φ . Появляющаяся горизонтальная проекция силы натяжения нити \vec{N} создаёт момент сил $\vec{M} = [\vec{R}, \vec{N}]$, который стремится повернуть платформу в противоположном направлении, вернуть её в положение равновесия, причём величина этого момента пропорциональна углу φ : $M = N_{гор} R = N \sin \theta \cdot R \sim \varphi$.

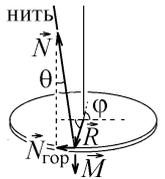


Рис.24

Поэтому платформа будет совершать малые гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0 = 2\pi/T$: $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$. Её угловая скорость $\omega = d\varphi/dt = \varphi_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ максимальна, когда вращающаяся платформа проходит положение равновесия и угол её поворота $\varphi = 0$: $\omega_{max} = \varphi_0 \omega_0 = 2\pi\varphi_0/T$,

(55)

где φ_0 – максимальный угол закручивания платформы, когда она поднимается на максимальную высоту h .

Полная механическая энергия системы, складывающаяся из её потенциальной и кинетической энергии, сохраняется, если все действующие в системе силы консервативны. Такими силами будут сила тяжести $m\vec{g}$ и упругие силы натяжения нитей \vec{N} , если пренебречь их деформацией и возникающими в точках подвеса диссипативными силами трения. В этом случае кинетическая энергия вращательного движения платформы с общей массой $m_{общ}$ и моментом инерции I в нижней точке будет переходить в потенциальную энергию силы тяжести в верхней точке её подъёма:

$$I \omega_{max}^2 / 2 = m_{общ} g h_{max}, \tag{56}$$

(максимальная высота подъёма h_{max} соответствует амплитуде φ_0).

Силы натяжения практически перпендикулярны к перемещениям точек крепления нитей (рис.24) и совершают настолько малую работу, что её можно не учитывать по сравнению с работой силы тяжести.

Подставляя в (56) соотношения (54) и (55) и сокращая в обеих частях равенства величину φ_0^2 , выражаем момент инерции платформы с лежащим на ней грузом через период T малых крутильных колебаний:

$$I = \frac{m_{общ} g R r}{\sqrt{l^2 + (R - r)^2}} \frac{T^2}{4\pi^2}. \tag{57}$$

Моменты инерции тел, вращающихся относительно общей оси, складываются. Чтобы экспериментально определить момент инерции тела с массой m , помещённого на платформу с массой $m_{пл}$ (рис.22), сначала измеряют период колебаний T_1 пустой платформы, а затем период колебаний T_2 платформы с грузом и, согласно (57) вычисляют экспериментально определённый момент инерции лежащего на платформе тела:

$$I_{экс} = \frac{g R r}{4\pi^2 \sqrt{l^2 + (R - r)^2}} ((m_{пл} + m) T_2^2 - m_{пл} T_1^2). \tag{58}$$

В действительности из-за деформации нитей подвеса и возникающих в точках подвеса диссипативных сил трения крутильные колебания постепенно затухают. Однако при первых 10-25 колебаниях их амплитуда φ_0 не успевает заметно измениться, и можно использовать формулу незатухающих гармонических колебаний (55).

Экспериментально определённый момент инерции физических тел (плоских пластинок, которые кладут на платформу так, чтобы центр их масс совпадал с осью симметрии платформы (с осью вращения)) сравнивают с величиной момента инерции I_C , вычисленного теоретически.

Для такого вычисления исследуемое тело разбивают на очень малые участки, которые можно считать материальными точками с массой m_i , находящимися на расстоянии r_i от оси вращения. Момент инерции тела складывается из моментов инерции составляющих его материальных точек: $I_{физ.тела} = \sum m_i r_i^2$ (рис.15). Эта величина является мерой инертности физического тела. Чем больше величина I , тем труднее заставить вращаться массивное тело, если оно покоилось, или затормозить, если оно вращалось.

Моменты инерции тел симметричной формы в виде плоских пластинок легко вычислить, если разбить их на малые элементы – тонкие полоски длины l или тонкие кольца с радиусом r и с массой dm . Моменты инерции этих элементов относительно оси симметрии, проходящей через их центр масс C , приведены на рис.25.

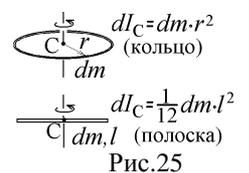


Рис.25

Используем также теорему Штейнера: если известен момент инерции тела I_C относительно оси вращения, проходящей через центр масс C , то момент инерции I_A этого тела с массой m относительно любой другой параллельной оси вращения A , находящейся на расстоянии d , будет равен

$$I_A = I_C + m d^2. \tag{59}$$

Для примера вычислим момент инерции тонкой пластинки в виде равностороннего треугольника с массой m и стороной a (рис.26). Проводим ось x вдоль высоты $h = \sqrt{3}a/2$ этого треугольника и разбиваем его на полоски толщины dx и длины $y = 2x/\sqrt{3}$, перпендикулярные оси x и находящиеся на расстоянии x от перпендикулярной к пластинке оси вращения A , проходящей через вершину треугольника. Масса этой полоски пропорциональна её площади: $dm = \frac{dS}{S_\Delta} m = \frac{y dx}{ha/2} m = \frac{8x dx}{3a^2} m$. В соответствии с теоремой Штейнера и рис.25 момент инерции этой полоски относительно оси A равен

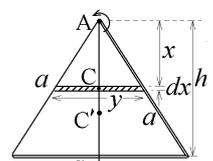
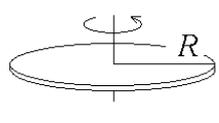
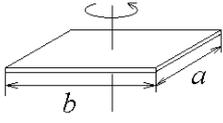
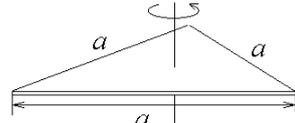


Рис.26

Таблица 3. Моменты инерции плоских тел относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно их плоскости.

Исследуемое тело	диск радиуса R_d	прямоугольник	равносторонний треугольник
			
Вычисленный момент инерции $I_{теор}$	$I_{диска} = \frac{1}{2} mR_d^2$	$I_{прямо} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$	$I_{треуг} = \frac{1}{12} ma^2$

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 6а

1. Дайте определение и объясните физический смысл момента инерции материальной точки и физического тела.
2. Сформулируйте теорему Штейнера.
3. Из одинаковых тонких жестяных деталей в виде ромба сделали, разрезав их на части, и раздвинув на одинаковые расстояния от оси вращения, четыре плоские фигуры (рис.А). Расставьте моменты инерции I_i этих фигур в порядке возрастания их величин и объясните свой ответ.
4. Два одинаковых тонких стержня с массой m и длиной l каждый приварены концами под прямым углом друг к другу. Найдите момент инерции этого угольника относительно перпендикулярной оси А, показанной на рис.Б.
5. Как вычислить момент инерции относительно оси симметрии, проходящей через центр масс плоской пластины? Прodelайте этот вывод и получите расчетные формулы для моментов инерции плоской прямоугольной пластины и диска, приведенные на рис.27.
6. Получите расчетную формулу для момента инерции пластины в форме равностороннего треугольника относительно оси, лежащей в плоскости пластины и проходящей через одну из его сторон (рис.В).
7. Объясните метод крутильных колебаний, которым в данной работе экспериментально определяются моменты инерции исследуемых пластин. Как надо размещать пластины на платформе?
8. По каким причинам угол отклонения платформы от положения равновесия должен быть малым? В каком случае платформа будет совершать гармонические колебания?
9. Как максимальная угловая скорость платформы связана с амплитудой колебаний и с высотой подъема платформы?
10. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии и объясните, каким образом его можно использовать в данной работе.
11. Прodelайте и объясните вывод формул (54) и (57).
12. Объясните возможные причины несоответствия величин моментов инерции, получаемых в данной работе экспериментальным способом и с помощью теоретических формул.

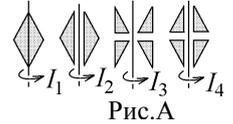


Рис.А

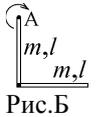


Рис.Б

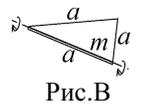


Рис.В

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 39, 41, 54.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.7 §1-5; гл.9 §1,2.

Работа №7. Определение коэффициента трения качения для различных материалов

Цель работы: определить величину коэффициента трения качения для различных пар металлических поверхностей; определить момент инерции физического тела несимметричной формы методом колебаний.

Теоретическое описание

По горизонтальной поверхности, образованной пластинками из разных металлов, которые можно менять, насаживая или снимая их со штырей, может свободно кататься тяжёлый маятник массы m (рис.28). Маятник образован двумя цилиндрами с радиусами R и r , параллельные оси которых не совпадают. По пластинкам катается цилиндр с меньшим радиусом r , под которым образуется пятно контакта – область, где цилиндр и пластинка прижаты друг к другу, а их материал деформирован.

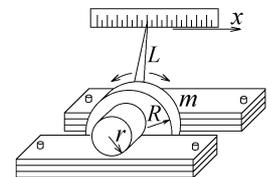


Рис.28

Рассмотрим вначале качение любого круглого тела, например – цилиндра с радиусом r . Когда цилиндр покоится, давление в области контакта распределено симметрично (рис.29,а), а возникающая сила нормальной реакции опоры \vec{N} проходит через ось цилиндра. Если же цилиндр начинает катиться вправо со скоростью v , то происходит перераспределение давления, возникает крохотный валик из сжимаемого материала, препятствующий качению цилиндра (рис.29,б). Качение без проскальзывания означает поворот цилиндра относительно горизонтальной мгновенной оси вращения, проходящей через точку приложения силы реакции опоры \vec{F}_p .

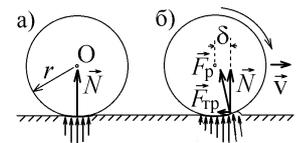


Рис.29

Эта точка смещена на расстояние δ относительно вертикали, проходящей через ось катящегося цилиндра. Силу \vec{F}_p можно разложить на две проекции: \vec{N} – сила нормальной реакции и $\vec{F}_{тр}$ – сила трения качения или сила трения сцепления (рис.29,б). При повороте цилиндра с радиусом r на угол $\Delta\phi$ вокруг оси О он переместится вдоль горизонтальной опоры на расстояние $\Delta x = r \cdot \Delta\phi$, а сила $\vec{F}_{тр}$, направленная про-

тив скорости \vec{v} , совершит работу, уменьшающую кинетическую энергию поступательного движения на величину:

$$\Delta\left(mv^2/2\right) = -F_{\text{тр}}\Delta x = -\vec{F}_{\text{тр}}r\Delta\varphi. \quad (61)$$

Работа момента силы равна произведению момента силы на угол поворота: $dA = M \cdot d\varphi$. Силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ и \vec{N} стремятся вращать цилиндр в разных направлениях вокруг оси О. Моменты этих сил, равные произведению силы на плечо, направлены в разные стороны. Их работа будет изменять кинетическую энергию вращательного движения маятника с моментом инерции I_0 вокруг оси О:

$$\Delta\left(I_0\omega^2/2\right) = F_{\text{тр}}r \cdot \Delta\varphi - N\delta \cdot \Delta\varphi. \quad (62)$$

Расстояние δ (плечо силы \vec{N} относительно оси катящегося тела О) называется коэффициентом трения качения (измеряется этот коэффициент в единицах длины и при качении металлического тела по металлу лежит в пределах 0,1-0,8 мм). Для металлических тел коэффициент δ практически не зависит от скорости v и определяется только упругими свойствами металла.

Полная механическая энергия системы складывается из её потенциальной и кинетической энергии поступательного и вращательного движения. Она сохраняется, если все действующие в системе силы консервативны. В нашем случае, складывая уравнения (61) и (62), видим, что суммарная работа силы трения сцепления $F_{\text{тр}}$ и момента этой силы равна нулю. На замедление скорости катящегося тела она не влияет. Механическая энергия катящегося цилиндра уменьшается на величину, равную работе момента силы нормальной реакции, который называется моментом трения качения:

$$-\Delta E_{\text{мех}} = -\Delta\left(mv^2/2 + I_0\omega^2/2\right) = N\delta \cdot \Delta\varphi. \quad (63)$$

Эта энергия идёт на работу по сжатию материала опоры под давлением катящегося тела, на формирование валика перед катящимся телом, на преодоление мостиков сцепления (участков, где из-за микронеровностей на поверхностях соприкосновения цилиндра и опоры возникают настолько большие давления, что между их молекулами возникают силы межмолекулярного притяжения, и они в этих местах "сцепляются" друг с другом).

Рассмотрим теперь движение маятника, изображенного на рис.28. Так как ось большого цилиндра радиуса R находится ниже оси О меньшего, катающегося по пластинкам цилиндра, то их общий центр масс С находится на расстоянии $OC = l$ от оси О (рис.30,а). При повороте маятника на малый угол φ , для которого $\sin \varphi \approx \varphi$, центр масс поднимется на высоту $h = l - l \cos \varphi = 2l \sin^2(\varphi/2) \approx l\varphi^2/2$, а маятник приобретает потенциальную энергию $E_{\text{пот}} = mgh = mg l \varphi^2/2$.

В точке максимального отклонения от положения равновесия маятник останавливается, и вся его механическая энергия равна потенциальной. Пусть φ_0 – начальный угол отклонения маятника от положения равновесия, а φ_1 – максимальный угол отклонения после первого колебания. Тогда потеря механической энергии за время первого колебания равна $\Delta E = mgl(\varphi_0^2 - \varphi_1^2)/2$. Эта величина согласно (63) равна величине работы момента трения качения, которая не зависит от того, в какую сторону отклоняется маятник. Он остановится, совершив поворот на угол $\varphi_{1/2}$, а затем вернётся, отклонившись на угол φ_1 (рис.30,б). Суммарный угол поворота за время первого колебания $\Delta\varphi = \varphi_0 + 2\varphi_{1/2} + \varphi_1$.

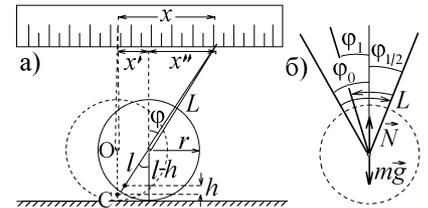


Рис.30

Для малых углов можно считать, что $\varphi_{1/2} \approx (\varphi_0 + \varphi_1)/2$ и $\Delta\varphi \approx 2(\varphi_0 + \varphi_1)$. Соотношение (63) примет вид

$$\Delta E = mgl(\varphi_0^2 - \varphi_1^2)/2 = A_{\text{тр}} = N\delta \cdot 2(\varphi_0 + \varphi_1), \quad (64)$$

а так как сила нормальной реакции уравновешена силой тяжести, $N = mg$, то из (64) следует, что для малых углов $\delta = l(\varphi_0 - \varphi_1)/4$.

После второго колебания максимальный угол отклонения окажется равным φ_2 , и те же расчеты дадут величину $\delta = l(\varphi_1 - \varphi_2)/4$ и т.п. После n -го колебания имеем $\delta = l(\varphi_{n-1} - \varphi_n)/4$. Складывая все эти величины, находим

$$n\delta = \frac{l(\varphi_0 - \varphi_n)}{4} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{l(\varphi_0 - \varphi_n)}{4n}. \quad (65)$$

Вместо углов поворота смещение маятника в данной работе измеряется показанием стрелки указателя длины L на линейке. Стрелка закреплена на оси катающегося цилиндра. При его повороте на угол φ ось цилиндра сместится на длину дуги $x' = r\varphi$, а конец стрелки сместится на расстояние $x'' = L \sin \varphi \approx L\varphi$ (рис.30,а). Суммарное смещение стрелки, измеряемое на линейке, $x = x' + x'' = (r + L)\varphi$ пропорционально углу φ . Отклонив стрелку вместе с маятником на расстояние x_0 , маятник отпускают и измеряют отклонение стрелки x_n после n -го колебания. Тогда, согласно (65) коэффициент трения качения можно вычислить по формуле

$$\delta = \frac{l(x_0 - x_n)}{4n(r + L)}. \quad (66)$$

Запишем теперь систему уравнений динамики поступательного и вращательного движения для маятника, катящегося без проскальзывания с ускорением a и угловым ускорением $\varepsilon = a/r$ относительно оси симметрии О (рис.31):

$$\begin{cases} ma = m\epsilon r = -F_{\text{тр}}; \\ I_0\epsilon = r \cdot F_{\text{тр}} - mg \cdot l \sin \varphi - N \cdot \delta. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений переменную $F_{\text{тр}}$ и подставляя $N = mg$, $\sin \varphi \approx \varphi$, $\epsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$,

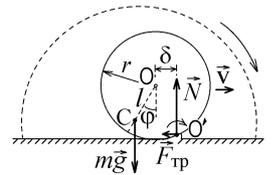


Рис.31

получаем уравнение $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I_0 + mr^2}\varphi = -\frac{mg\delta}{I_0 + mr^2}$. Это уравнение совпадает с динамическим

уравнением гармонических колебаний $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = \text{const}$, в котором циклическая частота ω_0 связана с периодом колебаний $T = t/n$, который определяют, производя с помощью секундомера измерение времени n колебаний маятника.

Так как $\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{mgl}{I_0 + mr^2}$, то измерив период колебаний, можно найти величину момента инерции маятника

ка относительно оси О:
$$I_0 = \frac{mgl}{4\pi^2}T^2 - mr^2 \tag{67}$$

Порядок выполнения работы

1. Поставить тяжёлое тело (маятник) из двух цилиндров с несовпадающими осями на металлические пластинки из одного металла, как показано на рис.28, так, чтобы оно не касалась стенок прорези, а стрелка L показывала нуль на миллиметровой шкале-линейке).

2. Отклонить маятник из положения равновесия, чтобы конец стрелки L (см. рис.30,а) оказался в точке с координатой $x = x_0 = 40$ мм на миллиметровой шкале (это начальная амплитуда колебаний). Отпустить маятник, и измерить время t его n полных колебаний ($n = 10$), а также величину $x = x_n$ максимального отклонения стрелки после n -го колебания (амплитуду n -го колебания). Вычислить величину периода колебаний по формуле $T=t/n$. Повторить измерения 5 раз (начальная амплитуда x_0 должна быть одинаковой). Результаты измерений занести в таблицу и вычислить средние значения $\langle x_n \rangle$ и $\langle T \rangle$.

3. Измерения повторить для пластинок из двух других металлов и результаты также занести в таблицу.

4. Для каждой пары контактирующих металлов (цилиндр-пластинка) по формуле (66) определить величину коэффициента трения качения $\delta = \frac{l(x_0 - \langle x_n \rangle)}{4n(r+L)}$. Величина расстояния l от оси опорного катающегося цилиндра до центра

масс системы С (рис.30,а или рис.31), а также величина радиуса r опорного цилиндра приведены на установке. Расстояние $r+L$ надо измерить линейкой – это расстояние от винта, которым стрелка прикреплена к оси опорного цилиндра до точки её пересечения с миллиметровой шкалой, по которой определяется расстояние x (рис.30,а).

5. По формуле (67) $I = \frac{mgl}{4\pi^2}\langle T \rangle^2 - mr^2$ вычислить момент инерции маятника относительно оси О опорного цилиндра радиуса r в трех случаях, когда он катается по пластинкам из разных металлов (масса m маятника приведена на установке).

6. Сравнить полученные значения I (в пределах погрешностей измерения и вычислений они должны совпадать). Вычислить среднее значение $\langle I \rangle$. Все результаты занести в таблицу.

Таблица результатов измерения и вычислений

$m = \dots \text{ кг}$		$r = \dots \text{ м}$		$l = \dots \text{ м}$		$r+L = \dots \text{ м}$		$x_0 = \dots \text{ м}$			
Название материала											
1.				2.				3.			
$t, \text{ с}$	n	$T, \text{ с}$	$x_n, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	n	$T, \text{ с}$	$x_n, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	n	$T, \text{ с}$	$x_n, \text{ м}$
$\langle T \rangle = \dots \text{ с}$		$\langle x_n \rangle = \dots \text{ м}$		$\langle T \rangle = \dots \text{ с}$		$\langle x_n \rangle = \dots \text{ м}$		$\langle T \rangle = \dots \text{ с}$		$\langle x_n \rangle = \dots \text{ м}$	
$\delta = \dots \text{ м}$		$I = \dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$		$\delta = \dots \text{ м}$		$I = \dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$		$\delta = \dots \text{ м}$		$I = \dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	
$\langle I \rangle = \dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$											

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 7

1. В чем отличие механизма трения качения и трения скольжения? Одинаковы ли силы трения скольжения и трения сцепления?
2. Что называется коэффициентом трения качения? От чего зависит величина этого коэффициента?

3. Почему неконсервативная сила трения сцепления, действующая на катящееся без проскальзывания тело, не изменяет скорости его качения? Почему это тело замедляет своё движение и останавливается?
4. Дайте определение момента силы и работы момента силы.
5. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии системы. По какой причине в данной работе уменьшается полная механическая энергия движущегося маятника? Что при этом происходит с маятником и опорной пластиной?
6. Получите связь между высотой подъёма центра масс маятника и углом φ его отклонения от положения равновесия.
7. Как показание конца стрелки на линейке связано с углом поворота маятника?
8. Прodelайте и объясните вывод расчетной формулы (66) для δ .
9. Сформулируйте условие возникновения гармонических колебаний.
10. Запишите уравнения динамики поступательного и вращательного движения и, сделав вывод, получите с их помощью выражение для циклической частоты ω_0 и момента инерции I_0 исследуемого в работе маятника (формула (67)).

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 21, 24, 53, 54.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.7 §2-5; гл.9 §1,3.

Работа №8. Определение силы трения скольжения

Цель работы: используя законы сохранения импульса и изменения механической энергии, экспериментально определить величину силы трения скольжения, а также величину коэффициента трения скольжения.

Теоретическое описание

При соприкосновении тел между их поверхностями образуются пятна касания размером $\Delta \sim 1-50$ мкм, в которых микронеровности, шероховатости соприкасающихся тел плотно прижаты друг к другу. Эти размеры сильно зависят от свойств материала контактирующих тел и от величины прижимающих их сил. В пятнах касания возникают силы, сцепляющие молекулы двух прижатых поверхностей (явление адгезии).

Если на одно из тел подействовать внешней силой F_{τ} , касательной к соприкасающимся поверхностям, а величина этой силы меньше некоторого предельного значения F_{\max} , то пятна контакта сместятся на несколько микрометров, их границы чуть изменятся, но тела друг относительно друга практически не сдвинутся (рис.32). В пятнах касания возникнут силы, препятствующие их смещению. Суммарная величина таких сил сцепления микронеровностей называется силой трения покоя $F_{\text{трпок}} = F_{\tau}$. Она уравнивает внешнюю силу и может принимать любое значение от 0 до F_{\max} (относительная скорость тел $v=0$).

Если внешняя сила F_{τ} превысит критическое значение F_{\max} , тела начинают двигаться, скользить друг относительно друга со скоростью v . Пятна контакта передвигаются по поверхности контактирующих тел, исчезают и возникают в тех точках, где начинают соприкасаться микронеровности, выступы на поверхностях. Сумма сил их сцепления образует силу трения скольжения $F_{\text{трск}}$, препятствующую смещению тел, но уже не уравнивающую внешнюю силу F_{τ} и направленную против скорости движения тела.

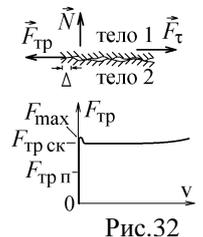


Рис.32

Сила $F_{\text{трск}}$ практически не зависит от скорости v и от площади соприкасающихся поверхностей (она зависит только от суммарной площади возникающих пятен касания, которая пропорциональна силе нормального давления \vec{N} , действующей на движущееся тело). Небольшой рост этой силы при больших скоростях v , показанный на рис.32, связан с появлением пластической деформации материала и началу превращения силы сухого трения (без смазки) в силу вязкого трения. Сила трения неконсервативна, её работа идёт на остаточную деформацию поверхностей и на нагревание тел.

Величина силы трения скольжения вычисляется по формуле

$$F_{\text{трск}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы соприкасающихся поверхностей. Такая зависимость $F_{\text{тр}}$, показанная на рис.32 называется законом Амонтона-Кулона.

В данной работе пулю с массой m_1 помещают в пружинный пистолет, плотно прижимая к затвору с массой m_3 , соединённому с пружиной, имеющей коэффициент жёсткости k . Предварительно затвор отводят на расстояние x , сжимая пружину на эту длину (рис.33). В момент выстрела вся потенциальная энергия сжатой пружины превратится в кинетическую энергию пули и затвора (трением деталей при растягивании пружины можно пренебречь):

$$kx^2/2 = (m_1 + m_3)v^2/2, \tag{68}$$

где k – коэффициент жёсткости пружины, указанный на установке.

Соединённый с пружиной затвор остаётся в пистолете, а пуля, вылетающая со скоростью v , попадает в висящее на горизонтальном стержне тело массы m_2 и застревает в заполняющем его пластилине. Такой удар, после которого тело с застрявшей в нём пулей начинает двигаться со скоростью u , называется абсолютно неупругим. Величину скорости u можно определить с помощью законов сохранения.

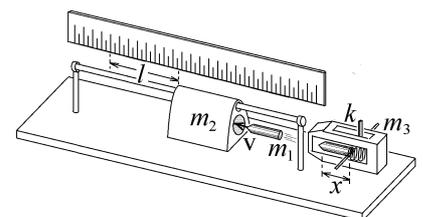


Рис.33

Закон сохранения импульса справедлив в замкнутой (или изолированной) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения 2-го закона Ньютона, записанного в виде $\frac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, откуда импульс $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$. Но закон сохранения импульса часто можно применить и в незамкнутой системе, в которой $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$, но взаимодействие происходит очень быстро, за время $\Delta t \rightarrow 0$ (удар, взрыв). Тогда изменение импульса $\Delta \vec{p}_{\text{системы}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$ пренебрежимо мало, и можно считать, что $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$.

Считая, что пуля застревает в пластине практически мгновенно, можем записать закон сохранения импульса при ударе:

$$m_1 v = (m_2 + m_1) u. \tag{69}$$

Механическая энергия системы пуля-маятник при неупругом ударе не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполнен, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти из соотношения $A_{\text{тр}} = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}$ (разность кинетических энергий до и после удара). Значительная часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

После удара механическая энергия также не сохраняется, так как на начавшее скользить по стержню тело действует постоянная неконсервативная сила трения скольжения, равная $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu (m_2 + m_1) g$.

Вся кинетическая энергия скользящего тела расходуется на работу силы трения скольжения и, пройдя расстояние l , измеряемое по линейке (рис.33), тело с застрявшей в нём пулей останавливается:

$$A_{\text{тр}} = \int F_{\text{тр}} dx = F_{\text{тр}} \cdot l = \mu (m_2 + m_1) g \cdot l = \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}. \tag{70}$$

Исключая из уравнений (68), (69) и (70) переменные v и u , находим величину силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{m_1^2 k x^2}{2l(m_2 + m_1)(m_1 + m_3)}. \text{ Массой затвора и пружины для данной установки можно пренебречь по сравнению с мас-$$

сой пули и считать, что $m_3 \approx 0$. Поэтому

$$F_{\text{тр}} = \frac{m_1 k x^2}{2l(m_2 + m_1)} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{m_1 k x^2}{2lg(m_2 + m_1)^2}. \tag{71}$$

Порядок выполнения работы

1. Прижать затвор к недеформированной пружине и заметить его положение (расстояние до края пружинного пистолета). Затем отвести затвор пистолета в крайнее положение, как показано на рис.33 (его фиксирование происходит автоматически), и снова заметить его положение. Разность этих положений, измеряемых линейкой, будет смещением затвора, которое соответствует сжатию x пружины. Занести измеренное смещение x в таблицу 2. Поместить пулю в ствол пружинного пистолета, прижав её к затвору.

2. Переместить подвешенный на горизонтальном направляющем стержне цилиндр с массой m_2 к стволу пистолета до упора (рис.33).

3. Нажатием на спуск произвести выстрел. По шкале линейки измерить перемещение l цилиндра с застрявшей в нем пулей и записать значение в таблицу 1.

4. Опыт повторить 5 раз, найти среднее значение $\langle l \rangle$.

5. По формулам (71) вычислить величину силы трения скольжения $\langle F_{\text{тр}} \rangle = \frac{m_1 k x^2}{2 \langle l \rangle (m_2 + m_1)}$, а также коэффициент

трения скольжения $\langle \mu \rangle = \frac{m_1 k x^2}{2 \langle l \rangle g (m_2 + m_1)^2}$, где m_1 – масса пули, m_2 – масса цилиндра, k – коэффициент упругости пружины указаны на установке.

Результаты измерений и вычислений записать в таблицах 1 и 2.

Таблица 1.

l , м					
---------	--	--	--	--	--

Таблица 2.

x , м	m_1 , кг	m_2 , кг	k , Н/м	$\langle l \rangle$, м	$\langle F_{\text{тр}} \rangle$, Н	$\langle \mu \rangle$

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 8

1. По каким причинам возникают силы трения скольжения и сила трения покоя? В чем различие этих сил?
2. Какая величина называется коэффициентом трения скольжения?
3. Зависит ли величина силы трения скольжения от массы и от скорости движущегося тела?

4. На плоскости находится тело массы m . Коэффициент трения скольжения равен μ (рис.А). При каком наибольшем угле наклона α тело ещё не будет скользить? Чему равна максимальная величина F_{max} силы трения покоя?

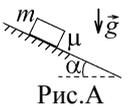


Рис.А

5. По горизонтальной плоскости скользят два плоских тела из одинакового материала, массы, площади и скорости которых отличаются в два раза (рис.Б). Во сколько раз отличаются действующие на них силы трения?

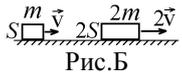


Рис.Б

6. Сформулируйте закон сохранения и изменения импульса. Как этот закон используется в данной работе, и по какой причине его можно использовать?

7. Какие силы называются консервативными и неконсервативными? Приведите примеры таких сил.

8. Сформулируйте закон сохранения или изменения полной механической энергии. Как этот закон используется в данной работе?

9. Пуля с массой m , летевшая со скоростью v , врезается и застревает в неподвижно стоявшем на горизонтальной плоскости теле с массой $m' = km$ (рис.В). Коэффициент трения скольжения равен μ . Определите путь, пройденный после этого телом m' до остановки, а также величину потерь механической энергии в момент удара. В каком случае эти потери будут больше – при $m' > m$ или при $m' < m$?

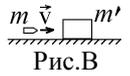


Рис.В

10. Сделайте и объясните вывод расчетных формул (71).

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 15, 20-22, 24, 27.
 2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §1-3,6; гл.5 §1,5.

Работа №9. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

Цель работы: экспериментально определить ускорение свободного падения с помощью физического маятника.

Теоретическое описание

Физическим маятником называется любое массивное тело, совершающее колебания в поле сил тяжести вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс C . В данной работе таким маятником является длинный металлический стержень, вблизи центра которого для увеличения периода колебаний закреплен массивный груз в виде металлической чечевицы (рис.34). На стержне винтом закрепляется маленькая опорная призма “П”, которую можно смещать по стержню, меняя расстояние d до центра масс маятника C . Маятник подвешивают в вертикальном положении, ставя призму “П” на горизонтальную опору, отводят от вертикали на небольшой угол φ и отпускают. После этого маятник будет совершать колебания вокруг горизонтальной оси подвеса OO' (рис.34).

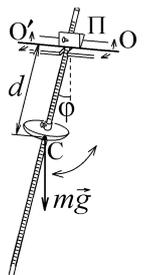


Рис.34

Уравнение динамики вращательного движения маятника в проекции на ось вращения имеет вид: $I_0 \cdot d^2\varphi/dt^2 = M$, где проекция момента силы тяжести $M = -mg \cdot d \sin \varphi$ (плечом силы тяжести будет расстояние $d \sin \varphi$). Этот момент стремится уменьшить угол φ и вернуть маятник в вертикальное положение равновесия.

Получаем уравнение
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{I_0} \sin \varphi = 0, \tag{72}$$

где I_0 – момент инерции маятника относительно оси OO' .

Условием возникновения гармонических колебаний будет действие на физическое тело силы или момента силы, пропорциональных смещению от положения равновесия и стремящихся вернуть тело в положение равновесия. В нашем случае таким моментом будет момент силы тяжести при условии малых колебаний ($\sin \varphi \approx \varphi$). В этом случае уравнение

(72) превращается в динамическое уравнение незатухающих собственных гармонических колебаний
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

имеющее решение в виде $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$, где циклическая частота и период колебаний физического маятника определяются формулами

$$\omega_0 = \omega_{\text{физ маят}} = \sqrt{\frac{mgd}{I_0}}, \quad T_{\text{физ маят}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{физ маят}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd}}. \tag{73}$$

Здесь I_0 – момент инерции маятника относительно оси подвеса, d – расстояние от оси подвеса до центра масс маятника, m – его масса.

Только при **малых** углах отклонения маятника от положения равновесия, $\varphi \leq 5^\circ - 6^\circ$, период его колебаний не будет зависеть от амплитуды. Для более точного измерения периода определяют время большого числа n полных колебаний. Тогда $T = t/n$. Из-за трения призмы “П” об опору колебания будут затухающими. Поэтому удастся измерить время $n = 10 - 20$ колебаний, а формула (73) задаёт их период с некоторой погрешностью, что сказывается на получаемых результатах.

Частным случаем физического маятника является математический маятник – грузик массы m , пренебрежимо малого размера, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длины l (рис.35,б). В этом случае $I_0 = ml^2$, $d = l$, а период **малых** колебаний математического маятника $T_{\text{мат маят}} = 2\pi\sqrt{l/g}$. Период колебаний физического маятника совпадает

с периодом колебаний математического маятника, длина которого равна

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{md} \quad (74)$$

Эта длина называется приведенной длиной физического маятника. На расстоянии $l_{\text{пр}}$ от оси подвеса O на линии, проходящей через центр масс C , находится точка O_k – центр качаний (рис.35,а). Это точка, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период малых колебаний получившегося математического маятника был равен периоду физического маятника, колеблющегося относительно оси подвеса O : $T_0 = T_{O_k}$. Точки O и O_k называют сопряженными.

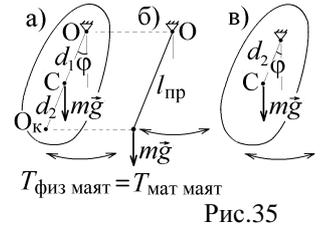


Рис.35

Момент инерции тела I_0 относительно произвольной оси O равен моменту инерции I_C этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс C , сложенному с произведением массы тела m на квадрат расстояния d между осями: $I_0 = I_C + md^2$ (это - теорема Штейнера). Согласно (73), имеем $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + md^2}{mgd}}$.

Это – квадратное уравнение, из которого следует, что маятник будет иметь одинаковый период колебаний $T_1 = T_2$ и одинаковую приведенную длину при двух разных расстояниях d_1 и d_2 от оси подвеса до центра масс (рис.35):

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_C + md_1^2}{md_1} = \frac{I_C + md_2^2}{md_2} \quad (75)$$

Зависимость периода колебаний от расстояния d показана на рис.36. Приводя соотношение (75) к общему знаменателю, и сокращая общий множитель $d_1 - d_2$, получим $I_C = md_1d_2$ и

$$l_{\text{пр}} = d_1 + d_2 \quad (76)$$

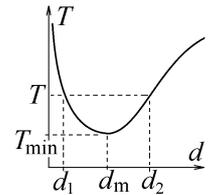


Рис.36

Так как d_2 – расстояние от оси подвеса до центра масс, то можно, перевернув маятник, который называют оборотным, взять точку подвеса в центре качания на расстоянии d_2 ниже центра масс, как показано на рис.35,а. Но можно подвесить маятник на том же расстоянии выше центра масс, как показано на рис.35,в. Правая часть

соотношения (75) от этого не изменится, как и период колебаний, равный $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}$. Отсюда находим ве-

личину ускорения свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2(d_1 + d_2)}{T^2} \quad (77)$$

При использовании оборотного маятника вычисленная величина g будет более точной, так как расстояние $d_1 + d_2$ можно определить, измеряя расстояния от краёв стержня на рис.34, длина которого известна. На данной установке маятник подвешивается с одной стороны от центра масс, и необходимо точно знать его положение. Для этого груз (чечевица) закрепляется посередине стержня, и расстояния d_1 и d_2 отсчитываются от середины стержня, где будет находиться центр масс C (рис.34). Любое смещение груза приведет к ошибке в определении g .

Порядок выполнения работы

1. Опорную призму укрепить винтом на конце стержня так, чтобы ребро, на которое она будет опираться на опору, было на уровне ближайшей риски стержня (рис.34).
2. Измерить расстояние d от ребра призмы до центра масс маятника C , который в данной работе практически совпадает с центром закрепленной на середине стержня чечевицы. Для дальнейшего определения этого расстояния можно использовать риски, нанесенные на стержень через каждый сантиметр.
3. Ребром опорной призмы установить маятник на подставку посередине прорези перпендикулярно ей и отклонить на угол 4° (коснитесь грузом стены, см.рис.34).
4. Секундомером измерить время t полных $n = 10$ колебаний маятника (включать секундомер и начинать отсчет времени следует при прохождении маятником любого крайнего положения). Вычислить период колебаний $T = t/n$.
5. Перемещая опорную призму через каждые три сантиметра к центру стержня, т.е. меняя расстояние d , измерять время 10 колебаний и величину периода. Получить значения 15 периодов.
6. По полученным данным построить график зависимости периода колебаний T от расстояния d , аналогичный изображенному на рис.36.
7. Для произвольного значения периода $T = T_1$ провести прямую, параллельную оси абсцисс, которая даст две точки пересечения с кривой: d_1 и d_2 (рис.36). При этом $l_{\text{пр}1} = d_1 + d_2$ – приведенная длина маятника при выбранном периоде колебаний.
8. Ускорение свободного падения определить по формуле (77) $g = \frac{4\pi^2 l_{\text{пр}1}}{T_1^2}$.
9. Аналогично подсчитать величину g_i еще четыре раза, взяв другие значения периода T_i и определяя соответствующие им величины $l_{\text{пр}i}$ по построенному графику.
10. Найти среднее значение $\langle g \rangle$.

11. Случайные отклонения каждого измерения ускорения свободного падения определить по формуле

$$\Delta g_i = g_i - \langle g \rangle, \text{ среднее квадратичное отклонение } - S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta g_i)^2}. \text{ Погрешность результата } \Delta g = S / \sqrt{n}, \text{ где } n = 5.$$

12. Данные измерений и вычислений занести в таблицы 1 и 2.

Таблица 1.

$d, \text{ м}$																		
$t, \text{ с}$																		
$T, \text{ с}$																		

Таблица 2.

$T_i, \text{ с}$	$d_1, \text{ м}$	$d_2, \text{ м}$	$g_i, \text{ м/с}^2$	$\Delta g_i, \text{ м/с}^2$	$(\Delta g_i)^2, \text{ м}^2/\text{с}^4$	$S, \text{ м/с}^2$	$\langle g \rangle, \text{ м/с}^2$	$\Delta g, \text{ м/с}^2$

13. Записать результат в виде: $g = (\langle g \rangle \pm \Delta g), \text{ м/с}^2$: $g = (\dots \pm \dots) \text{ м/с}^2$

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 9

- Какой маятник называется физическим, а какой – математическим?
- Выведите формулу периода колебаний физического и математического маятника.
- Сформулируйте теорему Штейнера и объясните, как она используется при выводе периода колебаний физического маятника.
- При каком условии маятник будет совершать гармонические колебания? Почему амплитуда колебаний маятника должна быть малой?
- Что называется приведенной длиной физического маятника и как её вычислить?
- Какая точка маятника называется центром качания? От чего зависит положение этой точки? Докажите, что период колебаний маятника относительно осей, проходящих через сопряженные точки одинаков.
- Период колебаний физического маятника с массой m одинаков, если расстояния от осей подвеса до центра масс равны d и $d' = 3d/4$. Чему равен момент инерции такого маятника относительно оси, проходящей через его центр масс?
- Тонкий стержень с массой m и длиной l совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси подвеса O , которую можно перемещать (рис.А). Найти наименьший возможный период колебаний такого маятника и соответствующую этому периоду приведенную длину.
- Физический маятник образован тонким стержнем с массой m и длиной l , к концу которого прикреплен груз пренебрежимо малых размеров с той же массой m . Горизонтальная ось подвеса O находится на расстоянии $d = l/4$ от центра стержня (рис.Б). Найти положение центра масс маятника, точку центра качаний, период малых колебаний и приведенную длину.
- Объясните метод определения величины ускорения свободного падения, сделав вывод расчетной формулы (77).
- По каким причинам найденная в данной работе величина ускорения свободного падения может отличаться от истинного значения $9,8 \text{ м/с}^2$?



Рис.А



Рис.Б

Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 33, 39, 46, 54.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.7 §2,3; гл.9 §1,2.

Работа №10. Изучение колебаний пружинного маятника

Цель работы: изучить незатухающие и затухающие собственные колебания пружинного маятника, определить их зависимость от характеристик маятника, исследовать зависимость периода колебаний от массы маятника, найти величину логарифмического декремента затухания колебаний.

Теоретическое описание

Гармоническими называются колебания, происходящие по синусоидальному или косинусоидальному закону: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $x(t)$ – смещение колеблющегося физического тела от положения равновесия, A – максимальное смещение, или **амплитуда**, $\omega t + \varphi_0$ – **фаза** колебаний, φ_0 – **начальная фаза** (при $t = 0$), $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – **циклическая частота** колебаний. Амплитуда A и частота ω гармонических колебаний постоянны. В механике необходимым условием возникновения гармонических колебаний будет действие на колеблющееся тело силы или момента силы, пропорциональных смещению от положения равновесия и стремящихся вернуть тело в положение равновесия. Такая сила называется упругой (в общем случае – **квазиупругой**).

В работе исследуется **пружинный маятник** – грузик массы m , колеблющийся вдоль вертикальной оси x на пружине с жесткостью k . Сила упругости стремится вернуть грузик в положение равновесия $x = 0$ (рис.37). Уравнение

движения такого маятника $m \frac{dv_x}{dt} = F_{\text{упр}x} = -kx$ можно записать в общей форме динамического уравнения собственных незатухающих гармонических колебаний, справедливой при действии любой квазиупругой силы: $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0$, где введено обозначение $\omega_0^2 = k/m$.

Подстановкой нетрудно убедиться, что решением этого уравнения является функция $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, описывающая колебания с циклической частотой ω_0 . Период незатухающих колебаний пружинного маятника (рис.2.37) зависит от его массы и от жесткости пружины:

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (78)$$

Величину постоянной амплитуды A и начальной фазы φ_0 можно найти из начальных условий для смещения и скорости маятника в начальный момент времени $t = 0$:

$$x(t=0) = A \cos \varphi_0; \quad v_x(t=0) = dx/dt = -A\omega_0 \sin \varphi_0. \quad (79)$$

В первом упражнении коэффициент жёсткости пружинки определяется статическим методом. Для этого по линейке определяют длину l_0 свободно висющей на опоре пружинки, а затем к ней по очереди подвешивают 3-5 разных грузов с заданными массами m_i , измеряя длину l_i растянутой пружинки (рис.38). Сила тяжести уравновешена силой упругости: $m_i g = k(l_i - l_0)$, откуда

$$k = m_i g / (l_i - l_0). \quad (80)$$

Вычисленные по формуле (80) значения k усредняют, получая величину $k_{\text{стат}}$.

Во втором упражнении величину k определяют динамическим методом, заставляя подвешенные по очереди грузики m_i совершать вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой (рис.37). Секундомером измеряют время $n = 10$ полных колебаний и определяют их периоды $T_i = t_i/n$. Для большей точности период колебаний каждого грузика m_i определяют 3-4 раза, находя его среднее значение $\langle T_i \rangle$. По формуле (78) находят значение k для каждого грузика:

$$k_i = 4\pi^2 m_i / \langle T_i \rangle^2, \quad (81)$$

а затем усредняют эти значения: $k_{\text{дин}} = \langle k_i \rangle$. Если измерения периодов проведены аккуратно, величины $k_{\text{стат}}$ и $k_{\text{дин}}$ должны совпасть с точностью до погрешностей.

В третьем упражнении исследуются собственные затухающие колебания пружинного маятника, для чего грузик на пружинке опускают в сосуд с жидкостью, обладающей вязкостью (рис.39). При не очень больших скоростях на движущийся грузик действует замедляющая движение диссипативная сила вязкого трения, пропорциональная скорости тела: $\vec{F}_{\text{тр}} = -\eta \vec{v}$, где η – коэффициент вязкого трения. С учетом этой силы уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{упр}x} + F_{\text{тр}x} = -kx - \eta \frac{dx}{dt}$$

можно записать в виде динамического уравнения собственных затухающих колебаний, $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$, где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \frac{\eta}{2m}$ – коэффициент затухания колебаний. В случае малой вязкости, когда $\beta < \omega_0$, его решением будет

$$x(t) = \underset{\text{амплитуда}}{A_0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (82)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота, $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – период затухающих колебаний, который возрастает с ростом вязкости η .

В случае большого сопротивления среды, когда $\beta \geq \omega_0$, колебания не возникают, несмотря на присутствие квазиупругой силы. Движение маятника в такой вязкой жидкости будет апериодическим (рис.40).

Амплитуда затухающих колебаний $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$, убывает со временем тем быстрее, чем больше величина β . Затухание колебаний характеризуют также величиной логарифмического декремента затухания θ . Это натуральный логарифм отношения амплитуды в момент времени t к амплитуде через период:

$$\theta = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Логарифмический декремент можно вычислить другим способом:

$$\theta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{A_0}{A_n} \right), \quad (83)$$

где величины амплитуд A_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, меняющиеся через каждый период, показаны на рис.41.

При выполнении работы грузик в жидкости отводят от положения равновесия на расстояние A_0 и отпускают, одновременно включая секундомер. После того, как маятник совершит n полных колебаний, секундо-

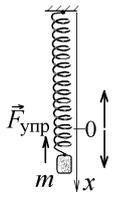


Рис.37

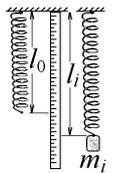


Рис.38

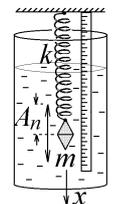


Рис.39

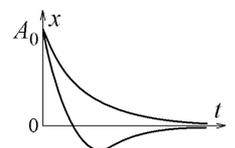


Рис.40

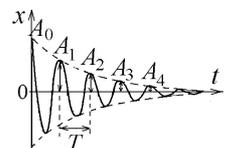


Рис.41

мер, измеривший время t , выключают и одновременно по линейке (рис.39) определяют амплитуду A_n n -го колебания. Эти измерения повторяют 3-4 раза для одинаковых значений A_0 , каждый раз определяя период колебания $T = t/n$, а затем находя среднее значение периода $\langle T \rangle$ и среднее значение $\langle A_n \rangle$.

Теперь по формуле (83) можно определить величину логарифмического декремента затухания θ , величину коэффициента затухания колебаний $\beta = \frac{\theta}{\langle T \rangle}$ и величину коэффициента вязкого трения $\eta = 2m\beta$.

Порядок выполнения работы

1. Определить по линейке длину l_0 нерастянутой пружины, подвешенной на кронштейне (рис.38)/
2. Поочередно подвешивая к пружине три разных груза (на грузах указаны их массы m_i , где $i=1,2,3$ – номер груза), определить длину l_i растянутой пружины в положении равновесия.

3. Для каждого подвешенного груза по формуле (80) вычислить коэффициент упругости пружины $k_i = m_i g / (l_i - l_0)$, определенный статическим методом и найти его среднее значение $\langle k_{\text{стат}} \rangle$. Данные занести в таблицу 1.

Таблица 1.

	m_i , кг	l_i , м	k_i , Н/м
$i = 1$			
$i = 2$			
$i = 3$			
$l_0 = \dots\dots\dots$ м	$\langle k_{\text{стат}} \rangle = \dots\dots\dots$ Н/м		

4. Подвесив каждый груз к этой же пружине, вывести маятник из положения равновесия, сместив вниз на 2-3 мм, и отпустить. Секундомером измерить время t_i полных $n = 10$ колебаний (начинать отсчет при прохождении грузом верхнего или нижнего положения). Найти период колебаний $T_i = t_i/n$. Опыт с каждым грузом повторить 3 раза и найти среднее значение периода колебаний $\langle T_i \rangle$ для каждого груза с номером $i=1,2,3$. Данные занести в таблицу 2.

Таблица 2.

	m_i , кг	n	t_i , с	T_i , с	$\langle T_i \rangle$, с	$\langle T_i \rangle^2$, с ²	k_i , Н/м	$\langle k_{\text{дин}} \rangle$, Н/м
$i = 1$		10						
$i = 2$								
$i = 3$								

5. Согласно формуле (81), определить значения коэффициента упругости k_i для разных грузов, полученные динамическим способом. Найти их среднее значение $\langle k_{\text{дин}} \rangle$ и сравнить его со значением $\langle k_{\text{стат}} \rangle$ из таблицы 1.

6. Построить график зависимости $\langle T \rangle^2$ от массы грузов m .

7. Опыт проделать с пружинным маятником, груз с массой m_1 которого помещен в сосуд с водой (рис.39). Вывести груз из положения равновесия, например на $A_0 = 20$ мм (это начальная амплитуда колебаний на рис.41), и, отпустив его, **одновременно** включить секундомер. Определить время t_1 , за которое груз совершит $n_1 = 20$ полных колебаний, а также амплитуду A_n после n_1 колебаний. Опыт выполнить 3 раза и найти среднее значение периода $\langle T_1 \rangle$ и амплитуды n_1 -го колебания $\langle A_n \rangle$.

8. Вычислить логарифмический декремент затухания $\langle \theta \rangle = \frac{1}{n_1} \ln \frac{A_0}{\langle A_n \rangle}$; коэффициент затухания $\beta = \frac{\theta}{\langle T_1 \rangle}$ и коэффициент вязкого трения $\eta = 2m_1\beta$. Данные измерений и вычислений занести в таблицу 3.

$m_1 = \dots\dots$ кг, $n_1 = \dots\dots$, $A_0 = \dots\dots$ мм

Таблица 3.

A_n , мм	t_1 , с	T_1 , с	$\langle T_1 \rangle$, с	$\langle A_n \rangle$, мм	$\langle \theta \rangle$	β , с ⁻¹	η , кг/с

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 10

1. Какие колебания называются гармоническими, и каковы необходимые условия возникновения гармонических колебаний в механической системе?
2. Когда маятник совершает собственные затухающие колебания, и чем они отличаются от незатухающих гармонических колебаний?
3. От каких параметров зависит сила вязкого трения, и в каком случае её надо учитывать?
4. Какие величины называются коэффициентом вязкого трения и коэффициентом затухания колебаний? Как они вычисляются в работе?

5. Запишите уравнение движения пружинного маятника и получите с его помощью динамические уравнения собственных незатухающих и затухающих колебаний. Приведите решения этих уравнений.
6. Какие величины называются амплитудой, фазой и начальной фазой затухающих и незатухающих собственных колебаний?
7. Пружинный маятник с массой m на пружинке с жёсткостью k , совершающий незатухающие гармонические колебания, имеет в начальный момент времени $t = 0$ координату $x = x_0$ и скорость $v = v_0$. Чему равна амплитуда и начальная фаза этих колебаний?
8. В каком случае пружинный маятник с массой m и коэффициентом жёсткости k будет совершать в жидкости аperiодическое движение, если коэффициент вязкого трения при его движении равен η ?
9. Получите формулу периода колебаний пружинного маятника в вязкой жидкости. Как изменяется его величина с ростом вязкости?
10. Какая величина называется логарифмическим декрементом затухания колебаний, как она связана с периодом колебаний и каким образом она вычисляется в данной работе?
11. Объясните метод, используемый при определении коэффициента жёсткости пружины статическим и динамическим способом.

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 50, 53, 58.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.9 §1,3.

Работа №13. Определение показателя адиабаты методом Клемана и Дезорма

Цель работы: определить величину показателя адиабаты воздуха экспериментальным методом и сравнить её с предсказанием термодинамической теории газов.

Теоретическое описание

Среди происходящих с газами процессов часто встречается и очень важен адиабатический процесс, протекающий без передачи тепла. Чтобы получить его уравнение, воспользуемся первым началом термодинамики: теплота, сообщаемая системе (газу), идет на изменение её внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними силами:

$$\delta Q = dU + \delta A .$$

Газ (воздух) с достаточной точностью можно считать идеальным. Если m – масса газа, а μ – его молярная масса, p – давление, V – объём, а T – температура, измеряемая в градусах Кельвина, то внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры, $U = \frac{m}{\mu} C_v T$, а совершаемая газом работа $\delta A = p dV$. Здесь C_v – молярная теплоёмкость идеального газа при изохорическом процессе, когда не меняется объём газа.

Известно, что $C_v = iR/2$, где $R = 8,314$ Дж/К·моль – универсальная газовая постоянная, i – число степеней свободы молекулы газа. Передаваемую газу теплоту удобно выразить через молярную теплоёмкость процесса C : $\frac{m}{\mu} C = \frac{\delta Q}{dT}$

(приведенная величина равна количеству теплоты, которую надо сообщить системе, чтобы повысить ее температуру на 1К). Величина теплоемкости зависит от способа, которым системе сообщается теплота. Если $C = \text{const}$, то процесс называется политропическим.

В результате для идеального газа первое начало термодинамики запишется в виде

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C dT = \frac{m}{\mu} C_v dT + p dV . \quad (84)$$

Воспользуемся теперь уравнением состояния идеального газа

$$pV = (m/\mu) \cdot RT . \quad (85)$$

Вычисляя дифференциал $(m/\mu) \cdot R dT = d(pV) = p dV + V dp$, исключаем dT из уравнения (2.84), в котором для адиабатического процесса, идущего без передачи тепла, надо принять $\delta Q = 0$. Получаем уравнение, связывающее давление и объём газа:

$$(C_v + R) p dV = C_p p dV = -C_v V dp . \quad (86)$$

Здесь подставлена величина молярной теплоёмкости изобарического процесса, при котором не меняется давление газа: $C_p = C_v + R = \frac{i+2}{2} R$ (эта связь называется уравнением Майера).

Отношение теплоёмкостей при постоянном давлении и постоянном объёме называется показателем адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} . \quad (87)$$

Подставляя эту величину в (86), разделим переменные и проинтегрируем: $\gamma \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dp}{p}$, получая $\gamma \ln V = -\ln p + \text{const}$. Это – уравнение адиабатического процесса для идеального газа или уравнение Пуассона, которое

обычно записывается в виде:

$$pV^\gamma = \text{const} . \tag{88}$$

Используя уравнение состояния (85), можно записать уравнение Пуассона через другие термодинамические переменные:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \text{или} \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const} . \tag{89}$$



Цель данной работы – экспериментальное определение величины γ для воздуха, который является смесью многих газов – двухатомных N_2 , O_2 , трехатомных CO_2 , H_2O и т.п. Идеальный газ – это совокупность не взаимодействующих друг с другом на расстоянии молекул, имеющих очень малый размер. Размером одноатомной молекулы пренебрегают, считая ее материальной точкой, способной двигаться в трех независимых направлениях, т.е. имеющей $i = 3$ степени свободы. Двухатомные и многоатомные молекулы имеют дополнительные вращательные степени свободы, показанные на рис.42.

Так как доля многоатомных и одноатомных газов в воздухе мала, то можно ожидать, что величина γ для воздуха будет близка к соответствующему значению для двухатомных газов: $\gamma \approx (5 + 2)/5 = 1,4$.

В работе используется установка, изображенная на рис.43. Она состоит из большого стеклянного баллона Б, соединяемого через кран К или с насосом Н, или с атмосферой. Манометр М служит для измерения разностей давлений газа в баллоне и в атмосфере.

Повернем кран К в положение I, соединяя баллон с насосом, и начнем накачивать воздух в баллон. Так как этот процесс происходит достаточно медленно, то за счет теплообмена через стеклянные стенки баллона успевает установиться тепловое равновесие. Температура воздуха внутри баллона после накачивания будет равна комнатной температуре T_1 . Давление воздуха внутри баллона возрастет до величины

$$p_1 = p_0 + \rho gh_1 , \tag{90}$$

где p_0 – давление воздуха в окружающей атмосфере, а ρgh_1 – разность гидростатических давлений жидкости с плотностью ρ в левой и правой трубках U - образного манометра (рис.43).

Вытащим теперь пробку-затвор из крана К, соединяя баллон с атмосферой. Воздух, расширяясь, **очень быстро** выходит через отверстие, теплообмен **не успевает произойти** и процесс можно считать адиабатическим. Так как $\gamma > 1$, то, согласно (88) и (89), при быстром адиабатическом расширении газа и его давление, и температура уменьшаются: воздух в баллоне будет охлаждаться до температуры ниже комнатной.

В момент, когда давление воздуха в сосуде сравнивается с атмосферным ($p' = p_0$, выравниваются уровни жидкости в манометре), пробку крана плотно закрывают в положении II, перекрывая выход газа из баллона (рис.43). За счет теплообмена через стеклянные стенки закрытого баллона начинается медленное изохорическое нагревание охлажденного воздуха в нем. При этом давление в баллоне растет, и уровни жидкости в манометре постепенно расходятся до тех пор, пока температура внутри баллона не станет равной комнатной: $T_2 = T_1$. В этот момент давление воздуха в баллоне станет равным

$$p_2 = p_0 + \rho gh_2 \tag{91}$$

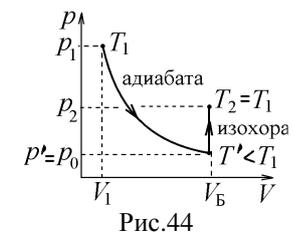
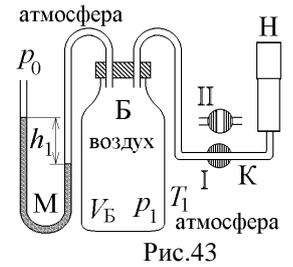
Процессы, протекающие в системе, изображены на рис.44. В момент окончания адиабатного расширения в баллоне останется часть воздуха с массой m_1 , занимавшая первоначально объем V_1 , меньший объема баллона V_B . В момент окончания изохорического нагревания температура воздуха в баллоне сравнивается с комнатной: $T_2 = T_1$.

Запишем для газа, остающегося в баллоне, уравнения адиабатического (89) и изохорического процессов, $T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T' p_0^{(1-\gamma)/\gamma}$ и $\frac{p_0}{T'} = \frac{p_2}{T_1} = \frac{p_2}{T_1}$, а затем устраним неизвестное отношение температур

$\frac{T'}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = \frac{p_0}{p_2}$. Логарифмируя это уравнение, находим $\frac{1-\gamma}{\gamma} \ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) = \ln\left(\frac{p_0}{p_2}\right)$, откуда $\gamma = \frac{\ln(p_1/p_0)}{\ln(p_1/p_2)}$. Подставляем сюда формулы (90) и (91):

$$\gamma = \frac{\ln(p_1/p_0)}{\ln(p_1/p_0) - \ln(p_2/p_0)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\rho gh_1}{p_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\rho gh_1}{p_0}\right) - \ln\left(1 + \frac{\rho gh_2}{p_0}\right)} . \tag{92}$$

Уровни жидкости (воды с плотностью $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$) раздвигаются в манометре М на рис.43 всего на $h \approx 10 \div 20 \text{ см}$, и избыточное давление газа $\rho gh \approx 10^3 \text{ Па}$ много меньше атмосферного давления $p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$. Поэтому величина $x = \frac{\rho gh}{p_0} \approx 10^{-2} \ll 1$, и в формуле (92) можно разложить все логарифмы в ряд, оставляя слагаемые только первого порядка малости: $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \dots \approx x$. Тогда соотношение (92) даёт конечную формулу для вычисления по-



казателя адиабаты:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (93)$$

Точность его определения в данном эксперименте не слишком высока, и поэтому возникают отклонения от теоретически ожидаемого значения $\gamma_{\text{эсп}} < \gamma_{\text{теор}} \approx 1,4$. Это связано не только с тем, что свойства реального воздуха немного отличаются от свойств идеального газа, и состоит он не только из двухатомных молекул. Ошибка главным образом связана с несовершенством используемого оборудования. При установке пробки крана К в положение II (рис.43) остаются крохотные щели, и воздух понемногу продолжает вытекать из баллона при нагревании. Поэтому уровень h_2 оказывается немного меньшим того уровня, который установился бы при идеально закрытом баллоне. Величина γ , измеренная на такой установке в соответствии с формулой (93), тоже окажется немного меньше истинной.

Порядок выполнения работы

1. Установить пробку крана К так, чтобы баллон Б, который находится под столом, сообщался с насосом Н (в положение I на рис.43).

2. Осторожно накачать воздух в баллон. Когда разность уровней жидкости в коленах манометра достигнет 10÷15 см, прекратить накачивание и повернуть пробку крана К в положение II, чтобы сосуд не сообщался с атмосферой. Пробка крана должна плотно прилегать к его стенкам и не давать утечки воздуха. Не забывайте об этом до конца эксперимента.

3. Через некоторое время, когда давление в баллоне окончательно установится и разность уровней в манометре перестанет уменьшаться, измерить разность h_1 уровней жидкости в левом и правом коленах манометра.

4. Повернуть пробку крана, давая воздуху в сосуде расширяться наружу. Разность уровней жидкостей в манометре резко уменьшится двумя, следующими друг за другом скачками. Как только при втором скачке уровни жидкостей станут одинаковыми, ($h_1 = 0$) пробку следует **немедленно и плотно** повернуть в кране К в положение II, закрывая баллон.

5. После того, как баллон будет закрыт пробкой, уровни жидкости в манометре снова начнут расходиться. Следует подождать, когда давление окончательно установится и разность уровней в манометре перестанет увеличиваться. Затем записать установившуюся разность уровней h_2 воды в обоих коленах манометра.

6. Опыт повторить не менее $n = 9$ раз для разных значений начальной величины h_1 , лежащих в пределах 10÷15 см. Для каждого опыта вычислить показатель адиабаты γ_i по формуле (93) $\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$, а затем определить его среднее значение $\langle \gamma \rangle$. Все измеренные и вычисленные величины заносить в таблицу 1.

Таблица 1

h_1 , см									
h_2 , см									
γ_i									
$\langle \gamma \rangle =$	$\Delta\gamma =$				$\gamma_{\text{теор}} =$				

7. Определить погрешность полученного значения показателя адиабаты

$$\Delta\gamma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \langle \gamma \rangle)^2}, \text{ где } n = 9 - \text{число измерений.}$$

8. Записать ответ в виде $\gamma = \langle \gamma \rangle \pm \Delta\gamma$: $\gamma = \dots \pm \dots$

8. По формуле $\gamma_{\text{теор}} = \frac{i+2}{i}$ вычислить теоретическое значение показателя адиабаты, принимая для воздуха $i = 5$, и сравнить полученный результат с $\langle \gamma \rangle$.

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 13

1. Сформулируйте I-е начало термодинамики и запишите его для идеального газа. Какими формулами определяются входящие в него работа и внутренняя энергия идеального газа?

2. Какой газ можно считать идеальным? Каким уравнением описывается его состояние, и какие величины входят в это уравнение?

3. Какой процесс называется изохорическим, изобарическим, изотермическим и адиабатическим? Будут ли эти процессы политропическими? Запишите уравнения этих процессов.

4. Дайте определение теплоёмкости. Почему для разных процессов величина теплоёмкости идеального газа различна? Как связаны теплоёмкости изобарического и изохорического процесса?

5. Выведите уравнение Пуассона (88) для адиабатического процесса и получите из него уравнения (89).

6. Какая величина называется показателем адиабаты? Чему она равна для гелия He? Для кислорода O₂? Для углекислого газа CO₂?

7. Что происходит с внутренней энергией идеального газа, если он расширяется (или сжимается) а) изобарически? б) изотермически? в) адиабатически?

8. Влажность воздуха начинает возрастать. Что при этом происходит с его плотностью и показателем адиабаты? Почему?

9. Какие процессы происходят с воздухом в баллоне Б на рис.43 при выполнении работы: а) при накачивании воздуха? б) при открывании крана К? в) при его последующем закрывании? Почему именно эти процессы?
10. В какой момент следует закрыть кран при выполнении работы?
11. Почему после закрывания крана давление воздуха в сосуде начинает расти, и по какой причине этот рост останавливается?
12. Сделайте и объясните вывод уравнений (92) и (93) для определения показателя адиабаты γ .
13. Почему можно измерять давление по разности высот уровней жидкости в U-образной трубке манометра?
14. Какой должна быть величина γ теоретически, и по каким причинам вычисляемый в работе результат может отличаться от этого значения?

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1973.- §§ 94-98.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.I §§ 4-9.

Работа №14. Определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва кольца

Цель работы: на опыте определить коэффициент поверхностного натяжения воды при комнатной температуре.

Теоретическое описание

На каждую молекулу жидкости действуют силы притяжения соседних молекул, образуя суммарную силу $\vec{F}_{\text{мол}}$. Для молекул "1", находящихся в глубине жидкости и полностью окруженных соседними молекулами, эта сила равна нулю (рис.45). Вблизи поверхности жидкости, для молекул "2", это окружение не полное, и возникают ненулевые силы $\vec{F}_{\text{мол}}$, стремящиеся втянуть эти молекулы вглубь жидкости. Такие молекулы образуют поверхностный слой конечной толщины, пропорциональной радиусу межмолекулярного взаимодействия.

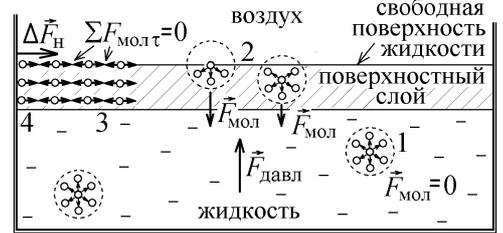


Рис.45

Чтобы молекула оказалась в поверхностном слое, ей надо совершить работу против сил $\vec{F}_{\text{мол}}$ и увеличить свою потенциальную энергию. Суммарная дополнительная потенциальная энергия молекул из поверхностного слоя образует поверхностную энергию $E_{\text{пов}}$ свободной поверхности жидкости (это поверхность, которая может свободно деформироваться, например – поверхность воды, налитой в стакан). Такая энергия пропорциональна площади S свободной поверхности:

$$E_{\text{пов}} = \sigma S . \tag{94}$$

Коэффициент пропорциональности σ называется коэффициентом поверхностного натяжения и зависит от свойств двух разделенных общей поверхностью сред (на рис.45 это жидкость и воздух).

Сумма сил $\sum \vec{F}_{\text{мол}}$ может создавать давление внутри жидкости, и уравновешена силами давления $\vec{F}_{\text{давл}}$, которые направлены перпендикулярно к свободной поверхности жидкости. На границе это давление равно атмосферному, и под плоской поверхностью жидкости с плотностью ρ давление будет равно сумме атмосферного и гидростатического давления:

$$p_{\text{жидк}} = p_{\text{атм}} + \rho gh . \tag{95}$$

Как видно из рис.45, для молекул "3" в поверхностном слое, которые окружены соседями со всех сторон, уравновешены касательные проекции межмолекулярных сил: $\sum F_{\text{мол}t} = 0$. Не равна нулю такая сумма для молекул "4", находящихся на краю свободной поверхности и окруженных соседними молекулами только с одной стороны. Она создаёт силу поверхностного натяжения

$$\Delta F_n = \sum F_{\text{мол}t} = \sigma \Delta l . \tag{96}$$

Эта сила: а) всегда приложена к контуру, ограничивающему свободную поверхность и направлена перпендикулярно к этому контуру; б) кроме того, она направлена по касательной к свободной поверхности; в) стремится уменьшить площадь свободной поверхности; г) пропорциональна длине Δl участка контура, ограничивающего свободную поверхность, на который она действует.

Работа против силы поверхностного натяжения идёт на увеличение поверхностной энергии. На рис.46 площадь поверхности увеличивается на $\Delta S = \Delta l \Delta x$, и внешняя сила F , равная силе поверхностного натяжения, совершает работу $\Delta A_n = \Delta F_n \cdot \Delta x = \sigma \Delta l \Delta x = \sigma \Delta S = \Delta E_{\text{пов}}$.



Рис.46

Таким образом, можно дать два определения коэффициента поверхностного натяжения σ :

- 1) он численно равен силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего свободную поверхность;
- 2) он численно равен работе, которую надо совершить, чтобы увеличить площадь свободной поверхности раздела сред на единицу.

На границе жидкости, налитой в сосуд, встречаются три поверхности: жидкость-воздух, жидкость-стенка, стенка-воздух (рис.47). Деформироваться и изгибаться может только свободная поверхность между жидкостью и воздухом. Поверхность стенки не свободна, но её молекулы также действуют на граничащие с ними молекулы жидкости, создавая силу $\Delta \vec{F}_{\text{ст}}$, приложенную, как и сила $\Delta \vec{F}_n$, к элементу Δl границы раздела сред в точке А (этот элемент перпендикулярен плоскости



Рис.2.47

рис.47). Сумма всех сил, действующих на элемент Δl должна быть равна нулю. Поверхность жидкости в месте касания со стенкой сосуда начинает искривляться, образуя угол θ со стенкой. Этот угол называется краевым, а искривленный участок жидкости – мениском. Если угол $0 \leq \theta < 90^\circ$, как показано на рис.47, то говорят, что жидкость смачивает стенку. Если $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ (рис.48), то наблюдается явление несмачивания. Форма образующегося мениска зависит от свойств соприкасающихся сред. Например, если стенки сосуда смазать жиром, то налитая в него вода не будет их смачивать (рис.48).

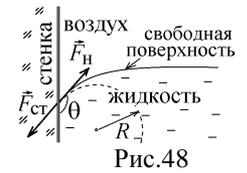


Рис.48

Заметим, что под искривлённым участком поверхности жидкости изменяется давление (95). Под выпуклой поверхностью (рис.48) оно растёт, а под вогнутой (рис.47) – уменьшается на величину $\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$, где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности.

Для определения коэффициента поверхностного натяжения воды, налитой в чашку, в неё опускают кольцо с наружным диаметром D_1 и с внутренним диаметром D_2 , подвешенное на пружине с коэффициентом жёсткости k , висящей на кронштейне (рис.49,б).

Предварительно пружину следует градуировать, отводя чашку с водой в сторону, последовательно, по одному, добавляя на подвешенное кольцо маленькие грузы с массами Δm и измеряя удлинение пружины n в зависимости от суммарной массы грузов $m_{гр} = \sum \Delta m$, лежащих на кольце (рис.49,а). Измерение производят по линейке, отмечая на ней горизонтальное положение края кольца (рис.49,а). Если n_0 – длина пружины без грузов ($m_{гр} = 0$), то сила тяжести грузов уравновешена силой упругости растянутой пружины: $F = m_{гр}g = k(n - n_0)$.

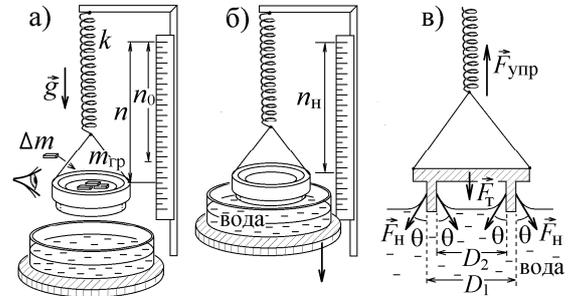


Рис.49

По вычисленным значениям силы F и измеренным значениям длины n строится градуировочный график (рис.50). Так как массы грузов-разновесов измеряются в миллиграммах, то вычисленные значения силы тяжести $F = m_{гр}g$ на этом графике удобно откладывать во внесистемных единицах, помня, что 1 мГ силы равен $9,81 \cdot 10^{-6}$ Н.

После этого надо убрать все грузы-разновесы и поднять чашку с дистиллированной водой так, чтобы в воду погрузилось только кольцо. Оно должно быть тщательно протёрто, и его нельзя после этого трогать пальцами, чтобы не нанести на него слой жира, который приведёт к несмачиванию стенок кольца (рис.48), что исказит результат.

Чашку с водой медленно опускают вниз, и она увлекает за собой кольцо, растягивающее пружину (рис.49,б). Это происходит из-за того, что на кольцо с массой m_k действуют показанные на рис.49,в и уравновешивающие друг друга сила тяжести $F_T = m_k g$, сила упругости растягиваемой пружины $F_{упр} = k \Delta n$ и сила поверхностного натяжения $F_H = \sigma \pi(D_1 + D_2)$, приложенная согласно (96) к двум кольцевым контурам с диаметрами D_1 и D_2 , ограничивающим свободную поверхность воды в месте её контакта со стенками кольца. Так как вода смачивает стенки кольца, то сила F_H направлена под краевым углом θ к вертикали (рис.49,в). Поэтому

$$F_{упр} - m_k g = k(n - n_0) = F_H = \sigma \pi(D_1 + D_2) \cos \theta. \quad (97)$$

С ростом длины пружины n растёт величина $\cos \theta$ в правой части (97) и уменьшается краевой угол θ . Так как $\cos \theta \leq 1$, то в момент, когда длина пружины становится равной $n = n_H$, а краевой угол $\theta = 0$, кольцо отрывается от воды. Соотношение (97) принимает вид $F_H = k(n_H - n_0) = \sigma \pi(D_1 + D_2)$.

Измерив несколько раз величину n_H в момент отрыва кольца, и вычислив среднее значение $\langle n_H \rangle$, по градуировочному графику (рис.50) определяем величину F_H (в Н) и вычисляем коэффициент поверхностного натяжения воды:

$$\sigma = \frac{F_H}{\pi(D_1 + D_2)} \quad (98)$$

Порядок выполнения работы

1. Штангенциркулем измерить наружный D_1 и внутренний D_2 диаметры кольца в пяти местах. Данные занести в таблицу 1.
2. Отвести нижнюю чашку с водой в сторону. Подвесить к пружине плоскую чашку, нижняя часть которой образует кольцо, и по шкале (линейке) определить положение n_0 верхнего края подвешенной чашки (кольца) в ненагруженном состоянии ($F = 0$, рис.49,а). Смотреть на шкалу нужно строго горизонтально вдоль верхнего края чашки (рис.49,а). Об этом не следует забывать до конца эксперимента.
3. Взять одну гирьку (груз, цифры на котором указывают вес груза в миллиграммах силы), поместить её в центр чашки с кольцом, как показано на рис.49,а, и определить по шкале положение n ее верхнего края.
4. Увеличивая нагрузку $F = mg$ (последовательно добавляя по одной гирьке, не забывайте подсчитывать каждый раз общую сумму нагрузки в миллиграммах), определять по шкале положение n верхнего края чашки с кольцом. Данные измерений занести в таблицу 2.

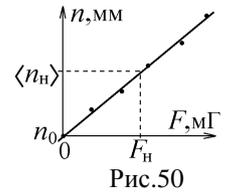


Рис.50

5. Снять все гирьки с чашки.

6. Поднять сосуд (нижнюю чашку) с водой до тех пор, пока поверхность воды не коснется нижнего края кольца. Следить за тем, чтобы этот край только смачивался, но не опускался вглубь воды, чтобы вода не коснулась плоской поверхности над кольцом. Затем, очень медленно и осторожно опуская сосуд, уловить равновесие (система находится в покое) **перед отрывом кольца**, и заметить по шкале положение n_H верхнего края чашки с кольцом (рис.49,б). Измерения проделать не менее 5 раз и найти среднее арифметическое значение $\langle n_H \rangle$. Данные занести в таблицу 1.

7. Осторожно снять кольцо с пружины и положить на подставку.

8. Построить график градуировки пружины $n(F)$, принимая за начало координат значение n_0 . Вид графика представлен на рис.50.

9. Зная растяжение пружины $\langle n_H \rangle$ под действием силы поверхностного натяжения, по построенному графику определить ее значение F_H в миллиграммах силы, а затем перевести в ньютоны.

10. Переведя все величины в систему СИ, по формуле (98) вычислить коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{F_H}{\pi(\langle D_1 \rangle + \langle D_2 \rangle)}$$

Таблица 1

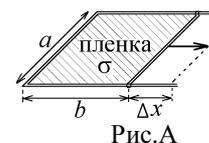
Номер опыта	D_1 , м	D_2 , м	n_H , мм
1			
2			
3			
4			
5			
Средние значения	$\langle D_1 \rangle = \dots\dots\dots$ м	$\langle D_2 \rangle = \dots\dots\dots$ м	$\langle n_H \rangle = \dots\dots$ мм

Таблица 2

m , мг													
$F = mg$, мГ													
$F = mg$, Н													
n , мм													
$F_H = \dots\dots\dots$ Н	$\sigma = \dots\dots\dots$ Н/м												

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 14

1. По какой причине образуется поверхностный слой у жидкой среды и чем определяется его толщина? Имеется ли такой слой у идеального газа? У твердого тела?
2. Что такое свободная поверхность жидкости и контур, ограничивающий свободную поверхность? Покажите их для воды, налитой в стакан.
3. Чему равна поверхностная энергия свободной поверхности воды, налитой в стакан с диаметром D ?
4. Чему равна сила поверхностного натяжения для воды, налитой в стакан? По какой причине она возникает? К чему она приложена и куда направлена?
5. Дайте два определения коэффициента поверхностного натяжения. В каких единицах он измеряется?
6. Масса молекулы мыла больше, чем у молекулы воды, поэтому кусок мыла тонет в воде. По какой причине мыльная плёнка всплывает на её поверхность?
7. Какую работу надо совершить, чтобы, как показано на рис.А, растянуть на ширину Δx рамку с натянутой на неё тонкой мыльной плёнкой, имеющей коэффициент поверхностного натяжения σ ?
8. Что называется краевым углом? Что такое мениск, и по каким причинам он образуется на краю поверхности жидкости?
9. Какое явление называется смачиванием и несмачиванием?
10. С какой целью в данной работе делается градуировочный график (рис.50), и как этот график используется для определения σ ?
11. Сделайте и объясните вывод расчётной формулы (98).
12. При опускании чашки с водой на рис.49,б кольцо на пружине жесткости k сместилось вниз на расстояние Δl . Чему будет равен при этом краевой угол θ ? Как ведет себя этот угол при дальнейшем опускании чашки? В какой момент кольцо отрывается от воды?
13. По каким причинам найденная в работе величина коэффициента поверхностного натяжения воды может отличаться от истинной? Почему кольцо надо тщательно протирать перед проведением измерений? Как несмачивание кольца водой повлияет на результат?



Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 92, 93, 94.
 2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §2.

Работа №15. Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса

Цель работы: ознакомиться с явлением внутреннего трения и определить коэффициент динамической вязкости (коэффициент внутреннего трения) по методу Стокса.

Теоретическое описание

В работе исследуется падение маленьких металлических шариков, с радиусами r и плотностью ρ_2 в вязкой жидкости с плотностью ρ_1 . (рис.51). На движущийся шарик с объёмом $V = 4\pi r^3/3$ действует сила тяжести $mg = \rho_2 Vg$, выталкивающая сила Архимеда, равная весу вытесненной жидкости $F_{\text{арх}} = \rho_1 Vg$, и сила вязкого трения со стороны жидкости, пропорциональная скорости шарика и направленная против вектора скорости $\vec{F}_{\text{тр}} = -\text{const} \cdot \vec{v}$.

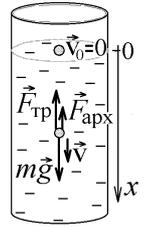


Рис.51

Причина появления вязкого или внутреннего трения в том, что молекулы реальной жидкости взаимодействуют друг с другом и с молекулами движущегося тела. Слои жидкости увлекаются движущимся со скоростью v телом и вблизи его поверхности имеют ту же скорость v (рис.52). На удалении скорость жидкости равна нулю.



Рис.52

Возле поверхности тела образуется тонкий пограничный слой, в котором скорость слоев жидкости меняется от v до 0. Этот слой с толщиной $d_{\text{п}}$ называется пограничным слоем Прандтля. Молекулы разных слоев жидкости внутри слоя Прандтля имеют разный импульс, и при столкновении этих молекул возникает явление переноса импульса. Движущееся тело передаёт свой импульс жидкости, увлекая её за собой с некоторой силой. С такой же по величине силой вязкого трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной противоположно, жидкость будет действовать на тело, тормозя его движение.

Перенос импульса происходит против направления вектора $\text{grad } v$, направленного в сторону увеличения модуля скорости v слоёв жидкости (рис.52). Величина потока импульса (импульс Δp , переносимый за время Δt через поперечную площадь S) равна величине силы вязкого трения: $F_{\text{тр}} = dp/dt = |-\eta \text{grad } v \cdot S|$, где множитель η называется коэффициентом динамической вязкости или просто вязкостью (коэффициентом внутреннего трения) среды. Так как слой Прандтля достаточно узок, то можно считать, что $|\text{grad } v| \approx (v - 0)/d_{\text{п}} \sim v$ и

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\text{const} \cdot \vec{v}.$$

Величина постоянной в этом выражении зависит от формы и размера движущегося тела и от вязкости жидкости. Для движущегося шарика с радиусом r сила вязкого трения описывается формулой Стокса:

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r \cdot v. \quad (99)$$

Этой формулой силу вязкого трения можно описать только в случае малых скоростей v , когда жидкость движется ламинарно, и линии движущейся жидкости нигде не прерываются, плавно огибая препятствие, как показано на рис.53,а, где выбрана система отсчёта, в которой шарик покоится, а жидкость движется со скоростью v . Заштрихован слой Прандтля.

При возрастании скорости v происходит срыв пограничного слоя Прандтля, как показано на рис.53,б. За препятствием образуется область, в которой жидкость движется турбулентно, создавая беспорядочные вихри. Сила $\vec{F}_{\text{сопр}}$, действующая на движущееся тело при турбулентном обтекании, значительно больше силы вязкого трения и имеет совсем другую природу. Она связана с разностью давлений жидкости с противоположных сторон шарика на рис.53,б. Эта сила называется силой лобового сопротивления и имеет выражение

$$F_{\text{сопр}} = A \frac{\rho v^2}{2} S_{\text{лоб}}, \quad (100)$$

где $S_{\text{лоб}}$ – площадь лобового сечения, ρ – плотность жидкости, A – коэффициент, равный 0,47 для шарика.

Определить характер обтекания можно с помощью критерия Рейнольдса: если безразмерное число Рейнольдса, равное $Re = \rho v d / \eta$, где d – поперечный размер тела (диаметр шарика), меньше некоторого критического значения $Re_{\text{кр}}$, то обтекание ламинарно, и действует сила вязкого трения (99). Если же $Re \geq Re_{\text{кр}}$, то обтекание турбулентно и использовать формулу (99) нельзя. Для шара $Re_{\text{кр}} \approx 2,5$.

По этой причине измерения в данной работе производятся с раствором глицерина, имеющим плотность $\rho = 1,261 \text{ кг/м}^3$ и большую вязкость η . В таком растворе шарик будет падать медленно, и слои жидкости будут двигаться ламинарно. При падении в воде обтекание шарика было бы турбулентным.

С учетом (99) запишем уравнение движения шарика в вязкой жидкости в проекции на вертикальную ось x (рис.51):

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_{\text{тр}} - F_{\text{арх}} = \rho_2 Vg - 6\pi\eta r v - \rho_1 Vg. \quad (101)$$

Скорость шарика, а вместе с ней и сила вязкого трения быстро растут, и в вязком глицерине спустя небольшой интервал времени правая часть уравнения (101) становится практически равной нулю. После этого шарик будет двигаться

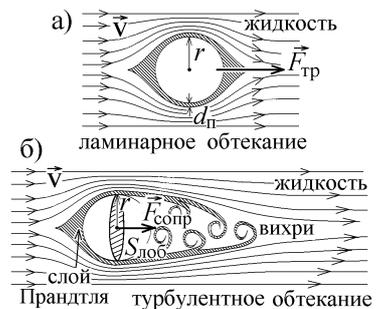


Рис.53

ся с постоянной установившейся скоростью

$$v_{уст} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{6\pi\eta r} V = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{6\pi\eta r} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{9} \frac{(\rho_2 - \rho_1)gr^2}{\eta} \quad (102)$$

На небольшом участке от поверхности жидкости до риски скорость успевает установиться. Поэтому установившуюся скорость падения шарика определяют, измеряя секундомером время его падения от нанесенной на сосуд риски до дна сосуда (рис.54): $v_{уст} = l/t$.

По измеренной таким образом скорости, согласно (102), можно определить величину коэффициента динамической вязкости исследуемого раствора глицерина:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{(\rho_2 - \rho_1)gr^2}{v_{уст}} \quad (103)$$

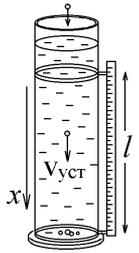


Рис.54

Заметим, что вязкость η уменьшается с ростом температуры.

Точнее характер движения шарика можно определить, записав уравнение (101) в виде $\frac{dv}{dt} = a - bv$, где

$$a = \frac{(\rho_2 - \rho_1)Vg}{m} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\rho_2}, \quad b = \frac{6\pi\eta r}{m} = \frac{6\pi\eta r}{\rho_2 V} = \frac{9\eta}{2\rho_2 r^2}$$

Разделяя переменные, делая замену $y = a - bv$ и считая, что в начальный момент времени $t = 0$ скорость шарика равна $v_0 = 0$, интегрируем обе части полученного соотношения:

$$\int_0^v \frac{dv}{a - bv} = -\frac{1}{b} \int_a^{a-bv} \frac{dy}{y} = \int_0^t dt. \text{ Получим } -\frac{1}{b} \ln\left(\frac{a - bv}{a}\right) = t, \text{ откуда } \frac{a - bv}{a} = e^{-bt} \text{ и } v = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}).$$

Экспонента быстро уменьшается со временем, и скорость шарика стремится к установившемуся значению $v_{уст} = a/b$. График зависимости скорости от времени показан на рис.55.

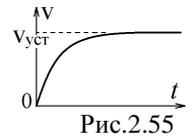


Рис.2.55

Порядок выполнения работы

1. Измерить микрометром диаметр d шарика в миллиметрах (мм) и определить его радиус r в метрах (м).
2. Осторожно отпустить шарик по центру сосуда непосредственно над поверхностью исследуемой жидкости и определить с помощью секундомера время t прохождения шарика между металлическими кольцевыми метками на сосуда (см.рис.54). Верхняя метка должна находиться не менее десяти сантиметров от поверхности жидкости.
3. Определить по линейке расстояние l между метками и вычислить установившуюся скорость шарика $v_{уст} = l/t$ (в м/с).
4. По формуле (103) вычислить коэффициент динамической вязкости η в системе СИ (в Па·с). Учтеть, что плотность исследуемой жидкости, налитой в сосуд $\rho_1 = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³ (глицерин), а плотность материала, из которого изготовлены шарики, $\rho_2 = 11,4 \cdot 10^3$ кг/м³ (свинец).
5. Результаты опытов и расчетов занести в таблицу 1.
6. Повторить выполнение пунктов 1- 5 еще для четырех шариков.

Таблица 1.

№	d , мм	r , м	l , м	t , с	$v_{уст}$, м/с	η_i , Па·с	$\Delta\eta_i$, Па·с	$(\Delta\eta_i)^2$, Па ² ·с ²
1								
2								
3								
4								
5								

7. Рассчитать среднее значение коэффициента динамической вязкости: $\langle \eta \rangle = \dots$

8. Определить случайные отклонения $\Delta\eta_i = \eta_i - \langle \eta \rangle$ для каждого измерения и среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta\eta_i)^2}. \text{ Вычислить погрешность } \Delta\eta \text{ результата измерений: } \Delta\eta = S/\sqrt{n} = \dots$$

9. Записать результат в виде: $\eta = (\langle \eta \rangle \pm \Delta\eta) \text{ Па·с}; \quad \eta = (\dots \pm \dots) \text{ Па·с}$

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 15

1. По какой причине возникает вязкость жидкости? Как она проявляется?
2. Как образуется пограничный слой и чем обусловлены его границы?
3. Какое течение жидкости называется ламинарным? Какая сила со стороны жидкости действует при этом на обтекаемое тело? По какой формуле она вычисляется, и от каких параметров зависит?
4. Какая величина называется коэффициентом динамической вязкости?
5. Какая сила называется силой Стокса? В каких случаях она действует и как направлена?

6. Какое течение называется турбулентным? Что при таком движении происходит с пограничным слоем? Какая сила со стороны жидкости действует на движущееся в ней тело при турбулентном обтекании?
7. Сформулируйте критерий Рейнольдса и объясните, как при помощи этого критерия определить характер движения жидкости и действующую со стороны жидкости силу.
8. На рисунке укажите направления всех сил, действующих на падающий в вязкой жидкости шарик, и запишите их выражения. Меняется ли со временем величина этих сил?
9. Запишите уравнение движения (2-й закон Ньютона) для падающего в жидкости шарика и определите с его помощью установившуюся скорость движения шарика.
10. Почему путь l , пройденный шариком, надо отсчитывать не от поверхности жидкости, а от риски, находящейся ниже?
11. Выведите расчетную формулу (103) для коэффициента динамической вязкости.
12. По измеренной скорости падения одного из шариков и вычисленной вязкости η проверьте выполнение условия $Re < Re_{кр}$ критерия Рейнольдса. Будет ли в этом случае на шарик действовать сила Стокса?
13. Две свинцовые дробинки 1 и 2 с разными радиусами r_1 и $r_2 > r_1$ сбросили без начальной скорости в вязкую жидкость. Нарисуйте графики зависимости скоростей этих шариков от времени падения t и сравните эти графики. Какой шарик быстрее упадет на дно сосуда и почему?

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 78,79.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.5 §5,6.

Работа №16. Определение длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха

Цель работы: ознакомиться с одним из методов определения микропараметров (средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха) через термодинамические параметры, исследовать процесс течения газа по капилляру.

Теоретическое описание

При столкновении молекул газа сближаются их электронные оболочки, и силы кулоновского взаимодействия расталкивают молекулы (рис.56,а). Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы** d . Круг радиуса d с центром в молекуле имеет площадь $\sigma = \pi d^2$, которую называют **эффективным сечением молекулы**. Попадая в пределы этого круга, другие молекулы рассеиваются, отклоняются на молекуле-мишени (рис.56,б).

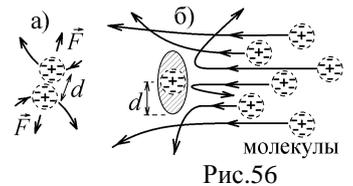


Рис.56

С ростом температуры растёт кинетическая энергия сталкивающихся молекул, пропорциональная температуре газа $E_{кин} \sim T$. Молекулы могут сблизиться на меньшее расстояние d . Но потенциальная энергия кулоновского отталкивания возрастает при сближении молекул настолько быстро (рис.57), что можно считать, что эффективный диаметр молекул практически не зависит от температуры: $d = const$.

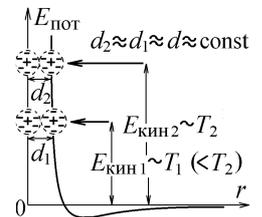


Рис.57

Среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными соударениями с другими молекулами газа называется **средней длиной свободного пробега молекулы** λ . Эта величина связана с концентрацией молекул газа n (числом молекул в единице объёма) соотношением

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \tag{104}$$

Величина λ определяется в данной работе по скорости втекания газа (воздуха) из атмосферы в сосуд через капилляр радиуса r (рис.58). Из-за микроскопической шероховатости стенок капилляра происходит **адгезия** (прилипание) молекул газа к поверхности стенок. Слой газа, непосредственно соприкасающийся со стенкой капилляра, неподвижен, а в центре капилляра газ движется с максимальной скоростью v_{max} . Разность скоростей слоёв газа приводит к процессу переноса импульса от центральной оси капилляра к его стенкам. Величина потока импульса, равная импульсу, переносимому молекулами газа за единицу времени через поперечную площадь S , в соответствии со вторым законом Ньютона равна величине **силы вязкого** или **внутреннего трения**

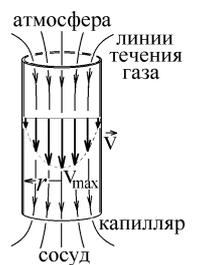


Рис.58

$$J_p = \frac{dp}{dt} = F_{тр} = \eta |grad v| S, \tag{105}$$

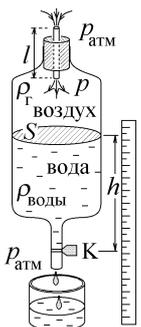


Рис.59

где коэффициент η называется **коэффициентом динамической вязкости** или просто **вязкостью** газа. Эта сила, действуя на газ, направлена против скорости газа в капилляре и замедляет его движение по капилляру.

Лабораторная установка показана на рис.59. В пробке, плотно закрывающей сосуд с водой, находится капилляр длины l , соединяющий воздух в сосуде с атмосферой. Внизу находится трубка, плотно закрытая краном "К", через которую вода может вытекать из сосуда. Первоначально давление p_0 воздуха в сосуде равно давлению $p_{атм}$ атмосферы снаружи. Давление жидкости внутри трубки, в сечении крана "К", складывается из давления воздуха в сосуде и гидростатического давления столба воды, имеющей плотность $\rho_{воды}$ и высоту h , отсчитываемую от поверхности воды до крана (рис.59): $p_0 + \rho_{воды}gh > p_{атм}$. Поэтому если кран "К" открыть, то вода начинает под давлением вытекать из сосуда по трубке сплошной струей.

Объём воды в сосуде уменьшается, но вытекающий по капилляру воздух не успевает заполнить этот объём из-за малого радиуса капилляра. Давление p воздуха внутри сосуда уменьшается, и когда давление воды в сечении крана сравняется с атмосферным давлением снаружи,

$$p + \rho_{\text{воды}}gh = p_{\text{атм}}, \quad (106)$$

вода начнёт вытекать из трубки отдельными каплями. В этот момент надо измерить начальное значение высоты h_1 .

Чтобы давление (106) не изменялось, объём капель вытекшей воды должен быть равен объёму воздуха, протекающего по капилляру.

Для вычисления этого объёма, выделим в капилляре воздушный цилиндр длины l с радиусом x и поперечным сечением $S' = \pi x^2$ (рис.60). Согласно (105) на его боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 2\pi xl$ действует тормозящая сила вязкого трения: $F_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dx} \cdot S_{\text{бок}}$, где $\frac{dv}{dx} < 0$.

При установившемся течении центр масс такого воздушного цилиндра движется с постоянной скоростью, и сила $F_{\text{тр}}$ уравновешивается разностью сил давления на основания цилиндра: $F_{\text{тр}} = (p_{\text{атм}} - p)S'$. Отсюда, с учетом (105) и

$$(106), \text{ получаем дифференциальное уравнение } 2\eta l \frac{dv}{dx} = -\rho_{\text{воды}}gh \cdot x.$$

Разделяя в нем переменные, интегрируем, учитывая, что у стенок капилляра, при $x = r$, скорость движения воздуха $v = 0$:

$$\int_0^v dv = -\frac{\rho_{\text{воды}}gh}{2\eta l} \int_r^x x dx, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{\rho_{\text{воды}}gh}{4\eta l} (r^2 - x^2) \quad (107)$$

(скорости слоёв воздуха в капилляре меняются по параболическому закону). Разобьём теперь поперечное сечение капилляра на бесконечно узкие кольца радиуса x с толщиной dx и с площадью $dS' = 2\pi x dx$. За время τ через эту площадь со скоростью v протечет объём газа $dV = dS' \cdot v\tau$, а объём воздуха, протекающего за время τ через все сечение капилляра будет равен

$$V = \int_0^r v\tau \cdot 2\pi x dx = \frac{\pi\rho_{\text{воды}}gh\tau}{2\eta l} \int_0^r (r^2 - x^2) x dx = \frac{\pi\rho_{\text{воды}}ghr^4}{8\eta l} \tau \quad (108)$$

(эта формула называется формулой Пуазейля).

При плотно закрытой пробке капли вытекают из сосуда очень медленно. За время τ , измеряемое секундомером, уровень воды в сосуде с площадью сечения S на рис.59 понизится незначительно, от уровня h_1 до h_2 , где $h_1 - h_2 \ll h$. Поэтому в формулу (108) можно подставить среднее значение $h = (h_1 + h_2)/2$. Приравняв объём вытекшей воды $V = (h_1 - h_2)S$ и объём воздуха, попавшего в сосуд в соответствии с формулой Пуазейля (108), найдем расчётную формулу для коэффициента вязкости воздуха:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho_{\text{воды}} g (h_1 + h_2) \tau}{16 l S (h_1 - h_2)}. \quad (109)$$

Заметим, что этот результат справедлив только при ламинарном течении воздуха по капилляру, когда слои газа движутся вдоль нигде не прерывающихся и плавно огибающих препятствия линий, как показано на рис.58. Проверить, выполнен ли ламинарный характер течения, можно при помощи критерия Рейнольдса: безразмерный параметр Рейнольдса Re не должен превышать критического значения $Re_{\text{кр}}$. Если $Re \geq Re_{\text{кр}}$, то возникают турбулентные вихри (рис.53,б), и полученные формулы (108) и (109) не справедливы.

В данной работе в случае течения газа (воздуха) с плотностью $\rho_{\text{газа}}$ по цилиндрическому капилляру, параметр Рейнольдса вычисляется по формуле $Re = \frac{\rho_{\text{газа}} \rho_{\text{воды}} g (h_1 + h_2) r^3}{8\eta^2 l}$, а $Re_{\text{кр}} = 2000 - 20000$.

Для вычисления средней длины свободного пробега λ используем формулу для вязкости газа, получаемую при анализе явлений переноса:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \rho_{\text{газа}} \langle v \rangle. \quad (111)$$

Подставляя в (111) формулу для средней скорости молекул газа $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ и выражение для плотности газа

$\rho_{\text{газа}} = \frac{m_{\text{газа}}}{V} = \frac{p\mu}{RT}$, полученное из уравнения состояния, находим следующую расчётную формулу для λ :

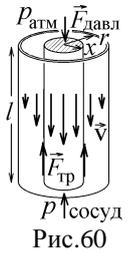
$$\lambda = \frac{3\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}}. \quad (112)$$

Другая форма записи уравнения состояния газа позволяет выразить концентрацию его молекул как

$$n = p/kT, \quad (113)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Из формул (104) и (113) находим расчётную формулу для эффективного диаметра молекулы:

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2} \pi \lambda p}}. \quad (114)$$



Порядок выполнения работы

1. Открыть кран К. Дождавшись, когда вода начнет вытекать каплями, включить секундомер и одновременно заметить положение уровня воды h_1 в сосуде по закрепленной сбоку линейке (см.рис.59).

2. Когда уровень воды в сосуде, **вытекающей через нижнюю трубку отдельными каплями**, уменьшится приблизительно на 1 см, одновременно закрыть кран и остановить секундомер.

3. Записать время вытекания τ и новый уровень h_2 воды. Расстояния h_1 и h_2 должны быть измерены от поверхности жидкости до крана К (рис.61).

4. Измерить термометром температуру t °С, найти термодинамическую температуру

$T = (t^\circ + 273)$, К, барометром измерить атмосферное давление p .

5. Вычислить коэффициент динамической вязкости воздуха η по формуле (109).

6. Вычислить среднюю длину свободного пробега λ молекул воздуха по формуле (112).

7. Вычислить эффективный диаметр молекул воздуха d по формуле (114).

Во всех этих формулах r – радиус капилляра, l – длина капилляра, S – площадь сечения сосуда с водой. Их величины приведены на установке. $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, $R = 8,31 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$ – универсальная газовая постоянная, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана, $\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$ – молярная масса воздуха, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

8. Данные измерений и вычислений занести в таблицу:

h_1 , м	h_2 , м	τ , с	T , К	p , Па	η , Па·с	λ , м	d , м

Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 16

1. Какие величины называются эффективным диаметром d и средней длиной свободного пробега λ молекулы? Как эти величины зависят от температуры и давления?

2. Газ совершает изобарический (или изотермический) процесс, при котором его температура T (или давление p) увеличиваются в два раза. Что при этом происходит с величинами d и λ ?

3. Какая величина называется коэффициентом динамической вязкости газа η ? Как величина $\eta_{\text{газа}}$ зависит от давления p и температуры T ?

4. Какие явления называются явлениями переноса? Приведите примеры таких явлений.

4. Чем вызвано появление вязкого (внутреннего) трения? Как направлена и чему равна сила вязкого трения?

5. Объясните вывод формулы Пуазейля (108). При каком условии она справедлива, и чем является величина V в этой формуле?

6. При открывании крана “К” на установке (рис.59) вода сначала вытекает из сосуда струей, а потом – отдельными каплями. Почему? Чему равно при этом давление воздуха внутри сосуда?

7. Через капилляр в сосуд втекает воздух с объемом $V_{\text{возд}} = 1 \text{ см}^3$. Сколько капель воды выльется при этом из сосуда, если каждую каплю можно считать шариком с радиусом 1 мм?

8. Сделайте и объясните вывод расчетных формул (109), (112) и (113) для величин η , λ и d .

9. Сравните вычисленные величины η , λ и d для воздуха с экспериментальными данными для этих величин при температуре 20°С, которые можно найти в Интернете. Чем могут быть вызваны отклонения от правильных значений?

10. Какое течение газа называется ламинарным? Как проверить условие ламинарности с помощью критерия Рейнольдса? Сделайте эту проверку, проведя вычисления с помощью формулы (110).

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 62, 78-80.

2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.5 §1,3,5,6.

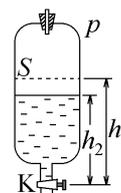


Рис.61